

有限帯板法による矩形板の動荷定について

北海道大学 正員 芳村 仁

北海道大学 正員 〇三 上 隆

北海道大学 正員 福士 彰 二

1. まえがき

周期的荷重を受ける弾性系の安定問題は弾性安定問題の主要な一部分であるがすでに周期的荷重を受ける柱、骨組構造物に關しては理論的、実験的研究がなされてゐる。しかし一方向の周期的荷重を受ける平板に關してはまだ報告は少なく十分解明されたとは言えないように思われる。そこで本報告は相對する2辺が単純支持、他の2辺が任意支持条件の矩形板の動荷定問題を有限帯板法(FSM)により解き、不安定領域(1次, 2次)を求めかつ不安定領域に及ぼす支持条件の影響を検討したものである。

2. 運動方程式の誘導

図-1において、 $x=0, x=l$ で単純支持、他の2辺が任意境界条件の動荷定問題を解くことにする。平板構造の断面を構成する平板要素を x 方向に分割し、その中を b 、長さを l として一つの帯板要素を考える。変位関数 w として変数分離形の式を仮定する。時間 t のみの関数を $g(t)$ とすると

$$w = w(x, y, t) = W(x, y) \cdot g(t) \quad (1)$$

ここで、 $W(x, y)$ として x 方向に半波の正弦波形を仮定し、 y 方向に三次多項式を用いる。

$$W(x, y) = (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2)$$

ここで、 $a_0 \sim a_3$ を節点変位成分で表示すれば

$$W(x, y) = \left[\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}\right) \theta_2 \right] \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3)$$

(3)式におけるSuffix i, j は $y=0, y=b$ が連続している次の要素との接合線を表わす。

$$(3)式を書き改めて $W(x, y) = H \{r\} g(t) \quad (4)$$$

$$H = \left[\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3}\right), \left(y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}\right), \left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}\right), \left(-\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}\right) \right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\{r\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\} g(t)$$

したがって(1)式は

$$w = w(x, y, t) = H \cdot \{r\} g(t) \quad (5)$$

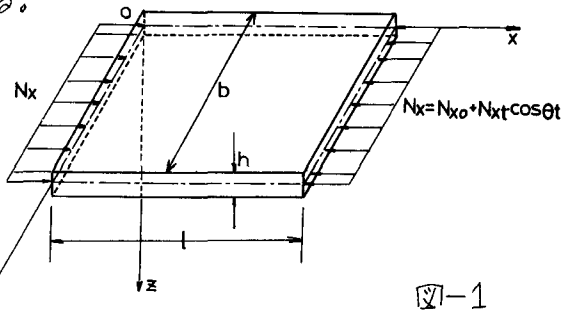
断面力と曲率との関係式は、等方性材料を仮定して

$$\{M\} = D \{K\} \quad (6)$$

$$D = \begin{bmatrix} D & D_1 & 0 & 0 \\ D_1 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}D \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ D_1 &= \nu D \end{aligned}$$

E =弾性係数、 ν =ポアソン比、 h =板厚

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\} g(t)$$



$$\{K\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} g(t)$$

曲率と変位とを関係づけるマトリックスを B とすると

$$\{K\} = B \{r\} g(t) g(t)$$

したがって(6)式は

$$\{M\} = DB \{r\} g(t) g(t) \quad (7)$$

図-1に示すような、一様に分布する面内力を受ける帯板要素の運動エネルギー(T)、ポテンシャルエネルギー(U)を求める

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \frac{\partial h}{\partial t} \{r\} g(t) g(t) H^T H \{r\} g(t) g(t) dx dy \quad (8)$$

ここで、 $\dot{}$ =時間に関する微分、 g =重力加速度

γ =単位体積当り重量

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \{ M \dot{y}^2 + K y^2 \} dx dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l h N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \{ r \dot{y} \} \text{ とおく}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \{ r \dot{y}^2 \} B^T D B \{ r \dot{y} \} dx dy$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l h N_x \{ r \dot{y}^2 \} G^T G \{ r \dot{y} \} dx dy \quad \text{---(9)}$$

Lagrange の式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial (r)} = 0$ より

$$M \{ r \ddot{y} \} + (K_E - K_G) \{ r y \} = 0 \quad \text{---(10)}$$

ここで $M = \frac{\partial h}{\partial g} \int_0^b \int_0^l H^T H dx dy \quad \text{---(11,1)}$

$$K_E = \int_0^b \int_0^l B^T D B dx dy \quad \text{---(11,2)}$$

$$K_G = h N_x \int_0^b \int_0^l G^T G dx dy \quad \text{---(11,3)}$$

$$= h N_x S_G$$

面内力 N_x を非周期性成分と周期性成分とに分け次の様に表す。
 $N_x = N_{x0} + N_{xt} \cos \theta t$

ここで θ = 面内力の振動数

N_{x0} = 非周期性荷重

N_{xt} = 周期性荷重

(10) 式を書き改めると

$$M \{ r \ddot{y} \} + (K_E - N_{x0} S_G - N_{xt} \cos \theta t S_G) \{ r y \} = 0 \quad \text{---(12)}$$

3. 境界振動数方程式

式(12)は Mathieu 方程式である。その解はオ1の場合は周期 $T = 2\pi/\theta$ を持つ解であり、オ2の解は周期 $T = \frac{4\pi}{\theta}$ をもつ周期解である。従って周期 $2T$, または T をもつ周期解によって安定領域、不安定領域に区分される。

変位ベクトル $\{ r y \}$ を次の様におく。

周期 $2T$ をもつ周期解を

$$\{ r y \} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_k \sin \frac{k\theta t}{2} + B_k \cos \frac{k\theta t}{2}) \quad \text{---(13)}$$

周期 T をもつ周期解を

$$\{ r y \} = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} (A_k \sin \frac{k\theta t}{2} + B_k \cos \frac{k\theta t}{2}) \quad \text{---(14)}$$

ここで、 A_k, B_k , および B_0 は時間に無関係な量である。
 式(13)と式(10)より主不安定領域(オ1次不安定領域),
 又式(14)と式(10)よりオ2次不安定領域の境界振動数を決定する境界振動数方程式が得られる。

主不安定領域の境界振動数方程式は

$$\left| K_E - N_{x0} S_G \pm \frac{1}{2} N_{xt} S_G - \frac{1}{4} \theta^2 M \right| = 0 \quad \text{---(15)}$$

オ2不安定領域の境界振動数方程式は

$$\begin{vmatrix} K_E - N_{x0} S_G - \theta^2 M & -0.5 N_{xt} S_G \\ -0.5 N_{xt} S_G & K_E - N_{x0} S_G - 4\theta^2 M \end{vmatrix} = 0 \quad \text{---(16,1)}$$

$$\begin{vmatrix} K_E - N_{x0} S_G & -N_{xt} S_G \\ -0.5 N_{xt} S_G & K_E - N_{x0} S_G - \theta^2 M \end{vmatrix} = 0 \quad \text{---(16,2)}$$

ここで式(15)を用いて動的不安定領域に影響を及ぼすパラメータ(振動数 θ , 平板の固有振動数 ω , 圧縮荷重 N_x^*)について説明する。

式(15)を次の様に書き改める。

$$\left| K'_E - \alpha \alpha_i S'_G \pm \frac{1}{2} b \alpha_i S'_G - \frac{1}{4} c^2 \beta_i M' \right| = 0 \quad \text{---(17)}$$

ここで、 K'_E, S'_G, M' は無次元化されたマトリックス

$$N_{x0} = a N_i^*, \quad N_{xt} = b N_i^*, \quad \theta = c \omega_i^*$$

$$N_i^* = i \text{ 番目の圧縮荷重}$$

$$\omega_i^* = i \text{ 番目の固有振動数}$$

N_i^*, ω_i^* は次式より決定できる。

$$\left| K'_E - \frac{a^2 m b^4}{D \pi^4} M' \right| = 0 \quad \text{---(18)}$$

$$\left| K'_E - \frac{(12 - \nu^2) b^2}{E \pi^2 h^3} S'_G \right| = 0 \quad \text{---(19)}$$

$$\therefore N_i^* = \alpha_i \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (\omega_i^*)^2 = \beta_i \frac{D \pi^4}{m b^4}$$

ただし $m = \frac{\rho h}{g}$

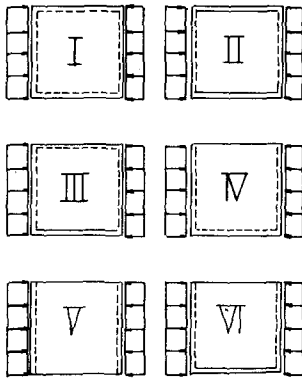
4. 適用例

図-2に示すような任意支持条件の矩形板($l=b$)の不安定領域を分割により決定する。各矩形板の静的圧縮荷重及び固有振動数を表-1に示す。

解析モード	$\omega_i^* = \sqrt{\beta_i} \frac{\pi^2 D}{b^2 m}$	$N_i^* = \alpha_i \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2$
I	$\sqrt{\beta_1} = 2.0$	$\alpha_1 = 4.0$
II	$\sqrt{\beta_1} = 2.935$	$\alpha_1 = 8.613$
III	$\sqrt{\beta_1} = 2.396$	$\alpha_1 = 5.742$
IV	$\sqrt{\beta_1} = 1.184$	$\alpha_1 = 1.402$
V	$\sqrt{\beta_1} = 0.976$	$\alpha_1 = 0.952$
VI	$\sqrt{\beta_1} = 1.286$	$\alpha_1 = 1.653$

表-1

表-2 は四辺単純支持矩形板の主不安定領域、第2不安定領域を有限帯板法とBolotin³⁾による値を比較したものである。表中のパラメータは拘束パラメータといわれる次の量である。



$$U = \frac{N_{st}}{2(N_{st} - N_{cr})} = \frac{b}{2c(a)}$$

図-2

— Free
--- Simply Supported
= Clamped

又表中Bolotinの項の値は次の式より求めた。
主不安定領域については

$$\frac{\theta}{2w} = \sqrt{1 \pm \mu + \frac{U^2}{8 \pm 9U}} \quad \text{---- (20)}$$

第2不安定領域については、 $\frac{\theta}{2w} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{3}U^2} \quad \text{---- (21)}, \quad \frac{\theta}{2w} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2U^2} \quad \text{---- (22)}$

有限帯板法による値は厳密解と差はなく、本解析法はかなりよい精度を有すると思われる。又本解析法の値は両端がPin結合の一樣な棒の不安定領域と一致している⁴⁾。図-3は図-2に示す任意支持条件の矩形板の主不安定、第2不安定領域を $a=0$ とし求め $(\theta/2w - U)$ 平面上に図示したもので、斜線領域が不安定領域を示す。

図-3

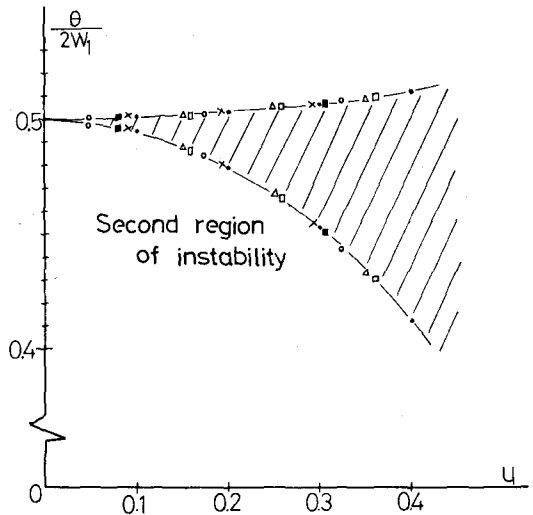
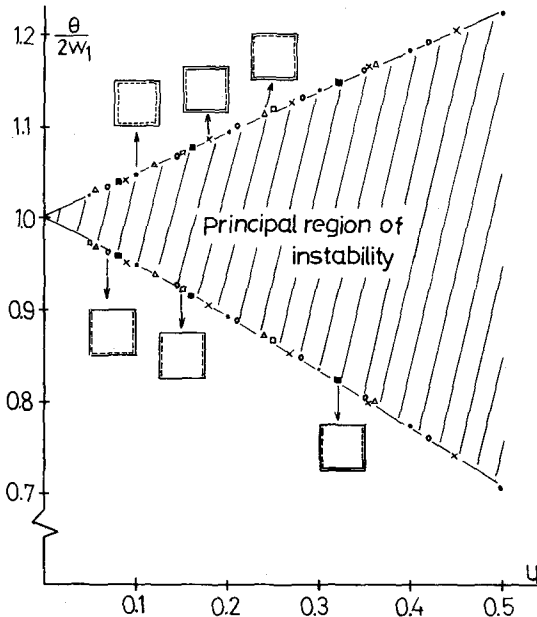


表-2

U	Upper bound		Lower bound	
	$\theta/2w$		$\theta/2w$	
	Bolotin	FSM	Bolotin	FSM
0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.04881	1.04881	0.94867	0.94868
0.2	1.09544	1.09544	0.89442	0.89442
0.3	1.14018	1.14017	0.83666	0.83666
0.4	1.18321	1.18321	0.77459	0.77460

principal region of instability

U	Upper bound		Lower bound	
	$\theta/2w$		$\theta/2w$	
	Bolotin	FSM	Bolotin	FSM
0.0	0.5	0.5	0.5	0.5
0.1	0.50083	0.50083	0.49497	0.49497
0.2	0.50332	0.50325	0.47958	0.47958
0.3	0.50744	0.50717	0.45277	0.45277
0.4	0.51316	0.51235	0.41231	0.41231

Second region of instability

図より、支持条件に関係なく、主不安定、オ2不安定領域とも四辺単純支持のそれと一致することがわかる。

図-4は、任意支持条件の矩形板の主不安定領域を種々の α (0.0, 0.2, 0.4, 0.6) について求めたものである。斜線の部分が不安定領域を表す。 α の値が増加するにつれて、不安定領域の減少が見られる。

5. 結 び

有限帯板法を相対する二辺が単純支持、他の二辺が任意支持条件の動的安定問題に適用し、主不安定領域、オ2不安定領域とも、四辺単純支持のそれと一致することを確かめた。

又、本報告の方法は、補剛された矩形板、弾性床上の矩形板などにも適用することが可能である。

6. 参考文献

- 1) 倉田忠義、佐伯博三、窪田彰：周期性荷重を受ける骨組構造物の弾性安定解析，土木学会論文報告集，オ249号，昭51.5
- 2) 山岸一彦、篠田徳：薄肉断面片持ちばりの動的不安定実験，オ31回年次学術講演会講演概要集，オ19
- 3) Bolotin, V.V.: The Dynamic stability of Elastic systems, Holden-Day, Inc, San Francisco, 1964
- 4) 村仁三上隆：構造物の動的安定性及び減衰の不安定領域に及ぼす影響について，土木学会北海道支部論文報告集，オ32号，昭和50年

図-4

