

等分布荷重を受ける周辺固定鋼製床版の弾塑性挙動について

北海道大学 土橋由造 内山武司 ○上田正生

序 漸増載荷される床版の、弾性域を越え、弾塑性状態を経て、終局に至るまでの変形挙動を、予測推量することは、まことに興味のある問題である。一般に、鉛直荷重を受ける鋼製床版は、弾・塑性域を問わず、変位の増大に伴つて、膜作用の生ずることは、よく知られた事柄であるが、著者らの、積層モデルを用いた鉄筋コンクリート床版(RC床版)の大変形、及び微小変形弾塑性解析値と、周辺固定と見做し得るRC床版の実験値との比較検討を行つた結果、RC床版は、大変形理論よりも、微小変形理論によつて解析する方が、実際の現象を、より適確に表現し得ることを報告した^{4,5,6}。又、周辺固定を意図した鋼製床版に就いての実験は、古くから多くの研究者によつて行われてはいるが、弾塑性理論解の妥当性を検証し得るだけの、信頼性ある実験データは、極めて少ないようである。このことは、特に、コンクリートに比べて強度が大きく、靱性のある鋼版の場合、理想的な固定状態の作製が、非常に困難であることを示唆しているものと考えられる。1969年、HookeとRawlingsは、ほぼ、周辺固定条件に近い、多数の矩形鋼製床版の実験を行い、弾塑性理論解を評価することの出来る貴重なデータを提供している。本報告は、広範なHookeらの実験の一部の紹介も兼ね、その実験値と、著者らの積層モデルによる、周辺固定鋼製床版の大変形弾塑性F・B解との比較検討を行つて、解の妥当性を検証し、併せて、岡村、吉田の解析³、及び鶴田らの解析、並びに実験⁷との比較をも行つたものである。

1 積層モデルによる大变形弾塑性解析

1-1 解析に当つての仮定と条件

(1) 鋼版を積層要素の集合体と見做す。
 (2) 材料の応力-歪関係は、弾性域でHookの法則、塑性域では、Prandtl-Reussの法則に従うものとする。又、降伏条件は、Von Misesの条件を用いる。

(3) 弾・塑性域共に、平面保持の仮定が成立する。

(4) Hellinger-Reissnerの変分原理²に基礎をおく、増分型汎関数を用いる。

(5) 基本独立変数は、x、y、z方向の変位u、v、wと、モーメントM_x、M_y、M_{xy}とし、変位は、素片内線形変化、応力は、一定とし、積層要素の形状は三角形とする。

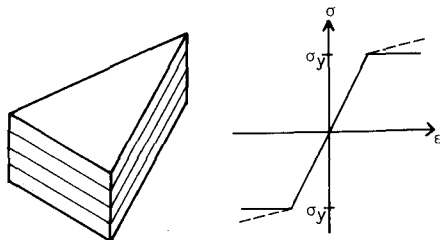


図1 積層モデル 図2 材料の応力-歪線図

1-2 増分型汎関数と支配方程式 基本変数を、変位u、v、w及びモーメントM_x、M_y、M_{xy}に取つたとき、Hellinger-Reissnerの変分原理に基づく、膜作用を考慮した増分型汎関数は、次式で

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & \iint \left\{ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & + 2\nu \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\ & - \frac{1}{2EI} \left\{ \Delta M_x^2 + \Delta M_y^2 + 2(1+\nu) \Delta M_{xy}^2 - 2\nu \Delta M_x \Delta M_y \right\} - \Delta q \cdot \Delta w \Big\} dx dy \\ & - \oint_{\partial \Omega} \Delta M_{ns} \frac{\partial \Delta w}{\partial s} ds - \int_{\Omega} \left(\Delta \bar{P}_{xn} \Delta u + \Delta \bar{P}_{yn} \Delta v + \Delta \bar{Q}_n \Delta w \right) ds - \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta \bar{w}}{\partial \eta} \Delta M_n ds \dots \dots (1) \end{aligned}$$

但し、E：ヤング率、h＝版厚、ν：ポアソン比、I＝h³/12

汎関数(1)式を、変位増分 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 、及びモーメント増分 $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}$ に関して変分を取ると、以下のような増分表示された支配方程式が得られる。

$$\text{素片内では、} \quad \frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_y}{\partial y^2} + \Delta q + \Delta N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \right) + \Delta N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \right) + 2 \Delta N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \frac{1}{EI} (\Delta M_x - \nu \Delta M_y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + \frac{1}{EI} (\Delta M_y - \nu \Delta M_x) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \frac{(1+\nu)}{EI} \Delta M_{xy} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

尚、(2)式は、増分面内力の平衡方程式、(3)式は、増分型の大変形基礎微分方程式であり、(4)式は、モーメント増分と、曲率増分の関係式である。

1-3 積層要素の応力-歪関係と、面内力、及びモーメント増分 積層要素を構成する素片内の、版厚方向の歪分布は、図3の関係から(仮定(3))、中立面から $(z_i - \ell)$ だけ離れた1層の歪増分 $\{\Delta \epsilon_i\} = \{\Delta \epsilon_{xi}, \Delta \epsilon_{yi}, \Delta \gamma_{xyi}\}^T$ は、次式で表示される。

$$\{\Delta \epsilon_i\} = \{\Delta \epsilon_0\} + (z_i - \ell) \{\Delta \phi\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

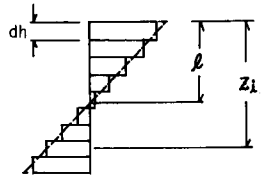


図3 歪分布の仮定

$$\{\Delta \epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{x0} \\ \Delta \epsilon_{y0} \\ \Delta \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (6)$$

従つて、 i 層の素片の応力増分 $\{\Delta \sigma_i\}$ は、HOOKの法則、及び、Prandtl-Reussの法則から(仮定(2))

$$\{\Delta \sigma_i\} = \{\Delta \sigma_{xi}, \Delta \sigma_{yi}, \Delta \tau_{xyi}\}^T = [D_i] \cdot \left\{ \{\Delta \epsilon_0\} + (z_i - \ell) \{\Delta \phi\} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

(7)式より、積層要素全層の面内力増分と、曲げモーメント増分は、(7)、(8)式のようになる。

$$\{\Delta N\} = \{\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy}\}^T = \left[\sum_{i=1}^n \{dh \cdot [D_i]\} \right] \cdot \{\Delta \epsilon_0\} = [D_M] \cdot \{\Delta \epsilon_0\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\{\Delta M\} = \{\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}\}^T = \left[\sum_{i=1}^n \{dh \cdot (z_i - \ell)^2 [D_i]\} \right] \cdot \{\Delta \phi\} = [D_B] \cdot \{\Delta \phi\} \quad \dots \dots \dots (9)$$

(8)、(9)式の関係を用いて、(1)式を書き直すと、積層モデルのための汎関数を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & \iint \left\{ \frac{1}{2} \{\Delta \epsilon_0\}^T [D_M] \{\Delta \epsilon_0\} + \frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \{\Delta M\}^T [D_B] \{\Delta M\} - \Delta q \cdot \Delta w \right\} dx dy - \oint \Delta M_n \frac{\partial \Delta w}{\partial s} ds \\ & - \int_{sp} \left(\Delta \bar{P}_{xn} \Delta u + \Delta \bar{P}_{yn} \Delta v + \Delta \bar{Q}_n \Delta w \right) ds - \int_{su} \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \Delta M_n ds \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

(10)式の変分を取ると、大変形弾塑性解析のための、非線形連立の特性マトリクスを得る。

2 実験との比較検討

2-1 Hooke らの実験

との比較 R・Hooke と B・Rawlings は、実験装置全体の対称性と、版固定枠の剛性を高めるため、中央部に厚い補剛版を持つ装置を用いた。図4に示すように、実験版を補剛版の両側に、固定バーを介してボルト締めされ、油圧によつて載荷された。実験に供された版は、幅10inches，長さ10～30inches（辺長比：

1、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ ）の矩形鋼版で、4種の異なるスパン-版厚比が、 $a/h = 53.5, 86.5, 129, 161$ の、総計19体である。使用鋼材のヤング率は、 3×10^7 lb/sqin、歪硬化率は、 $3 \sim 3.3 \times 10^6$ lb/in で、初期降伏応力の平均値 σ_y は、30300 lb/sqin であつた。図5、6、7は、この HOOKE らの実験結果のうち、辺長比1、 $\frac{1}{2}$ 、及び $\frac{1}{3}$ の版の、無次元化荷重-撓み曲線を、各々異なる、3つのスパン-版厚比について示したものである。尙、これらの図中に、著者らの、歪硬化を考慮した場合と、無視した場合の弾塑性解析結果を、同時に記入したが、歪硬化による変形曲線の変化

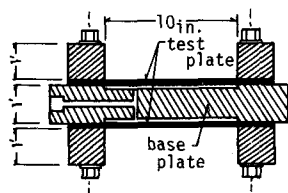


図4 Hookeらの実験装置

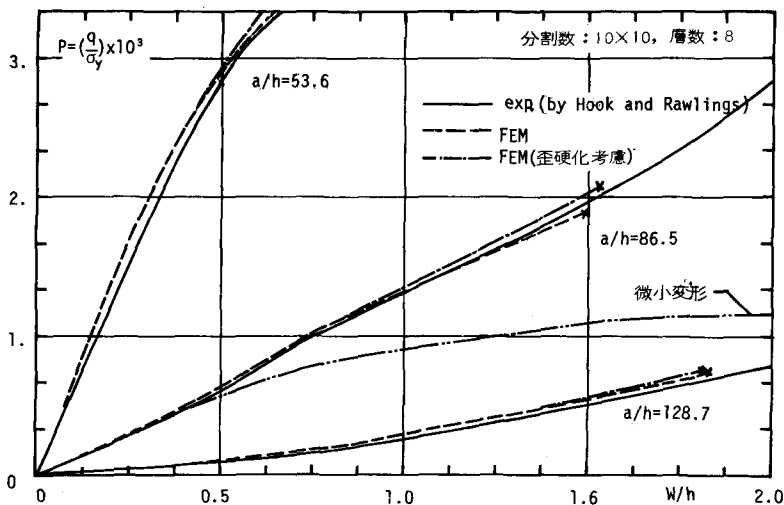


図5 荷重-撓み曲線（辺長比1）

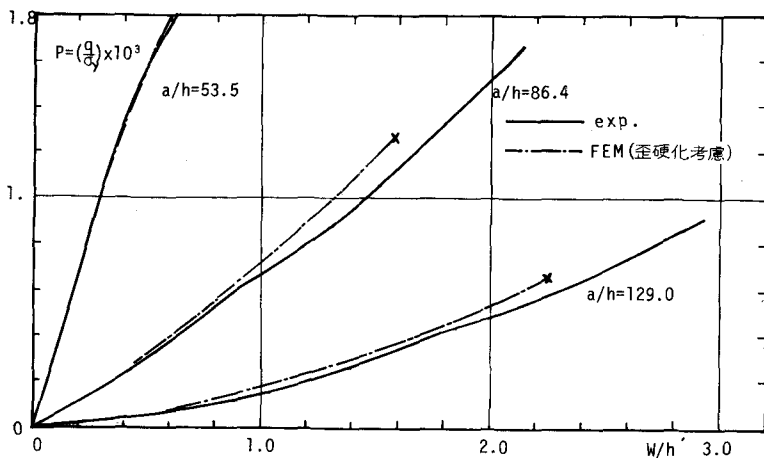


図6 荷重-撓み曲線（辺長比1/2）

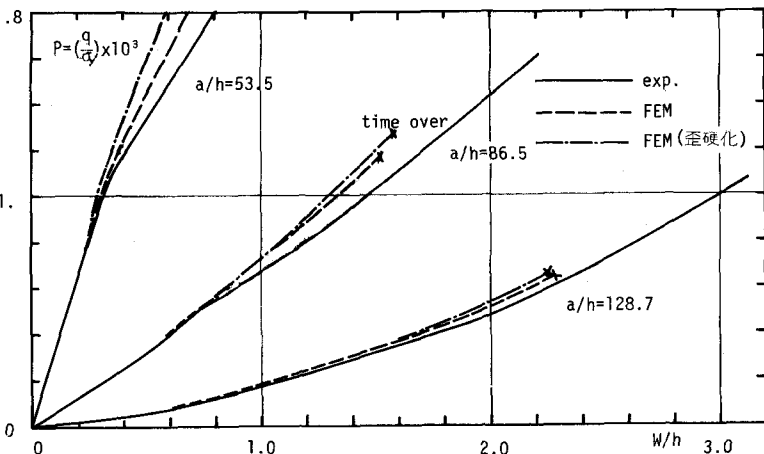


図7 荷重-撓み曲線（辺長比1/3）

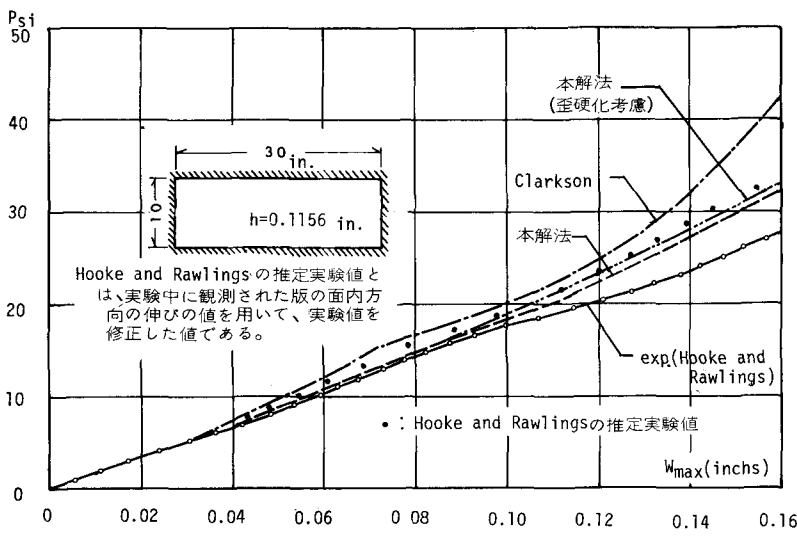


図8 荷重-撓み曲線 (辺長比1/3)

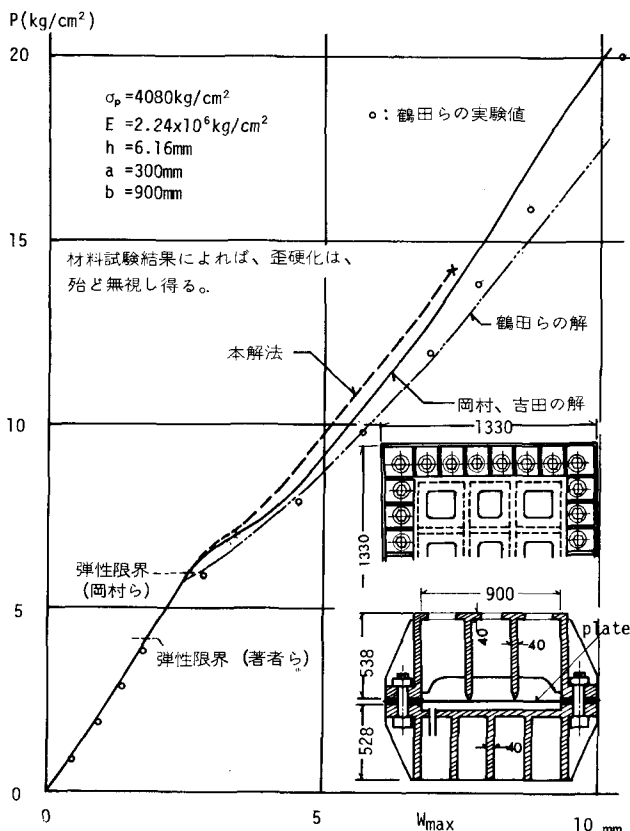


図9 鶴田らの実験との比較 (辺長比1/3)

は、塑性化が、可成り進展してから現われるが、その影響は、それ程大きくはなく、両解析曲線共、実験結果と良く一致しているようである。図8は、辺長比 $\frac{1}{3}$ 、スパン-版厚比128.7の荷重-撓み曲線をClarksonの弾塑性解、及び著者らの解析結果と比較したものである。図中のClarksonの予測曲線とは、固定辺に塑性ヒンジを生じ、他の部分は弾性大撓み状態にあるも

のを見做した、大撓み仮定による近似解である。実験値と、著者らの理論値は、版中央点の撓みが、0.10 inches 付近までは、非常に一致を示しているが、実験曲線は、この点を境に、勾配の変化が顕著となり、この試験装置に於ける固定度の低下を伺い知ることが出来る。

2-2 岡村らの弾塑性解、及び鶴田らの解析、並びに実験との比較 図9は、辺長比 $\frac{1}{3}$ の版に於ける、Clarksonの仮定の他に、版中央部に塑性ヒンジを仮想した、鶴田らの解析、並びに実験結果と、岡村らの、Fourier級数と、部分的に差分法を用いた弾塑性理論値、及び著者らの解を同時に示したものである。

尚、本報告の計算は、北大大型計算センターのFACOM230/75によつた。

参考文献

- 1 R.Hooke and B.Rawlings "An experimental investigation of the behaviour of clamped, rectangular, mild steel plates subjected to uniform transverse pressure" Proc. of Institution of Civil Eng. January, 1969, vol-42
- 2 E.Reissner "On a variational for finite elastic deformation" J.Math. and Physics 1953
- 3 岡村宏一, 吉田公憲 "大たわみ、およびリブの補剛

を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析" 土木学会論文報告集第196号 1971年12月

- 4 土橋, 内山, 上田 "積層モデルを用いた有限要素法による鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析" 建築学会道支部研究報告集第45回 1976年3月
- 5 土橋, 内山, 上田 "大撓み式と微小変形式による鉄筋コンクリート各種床版の弾塑性解析" 建築学会道支部研究報告集第46, 1976, 9
- 6 土橋, 内山, 上田 "鉄筋コンクリートスラブの弾塑性解析" 土木学会第30回年次大会講演概要集 I部門 1976年10月
- 7 鶴田, 他 "水圧を受ける平板の強度" 造船協会論文集第109号 1961年