

## フラットスラブの柱頭部の応力分布について

室蘭工業大学 正員 中村 作太郎  
室蘭工業大学 学生員 〇竹本 和生

## 1. まえがき

フラットスラブ構造<sup>1),2)</sup>は、等分布荷重として取り扱うことができる荷重を受けるときに用いられ、約600mm以上の荷重下で、梁を用いる構造よりも経済的になるといわれ、比較的大きな構造物に用いられるが、応力の計算について不明な点が多いとされている。

本論文は、有限曲線角柱要素法<sup>3)-5)</sup>を用い、フラットスラブ構造の柱頭部の応力性状を解明するもので、ドロップパネル、カラムキャピタル等、構造細目についても検討を加える。

## 2. 解析

解析には、有限曲線角柱要素法を用い、曲線三角柱要素を用い計算を行った。

図-1に示すような曲線角柱要素を考え、次のような変位仮定をする。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^m(r, z) \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ v^m(r, z) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ w^m(r, z) \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u^m(r, z) &= \alpha_1^m + \alpha_2^m r + \alpha_3^m z \\ v^m(r, z) &= \alpha_4^m + \alpha_5^m r + \alpha_6^m z \\ w^m(r, z) &= \alpha_7^m + \alpha_8^m r + \alpha_9^m z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

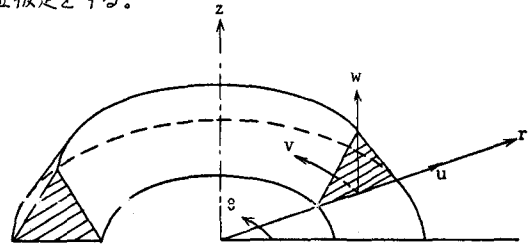


図-1 曲線角柱要素と変位成分

各々の変位に対応する節点力  $\{F\} = \{F_r, F_\theta, F_z\}^T$  も(1)と同様に級数展開し、その方向も一致させる。

要素の節点変位を  $\{\delta_e^m\} = \{u_1^m, v_1^m, w_1^m, u_2^m, v_2^m, w_2^m, u_3^m, v_3^m, w_3^m\}^T$  とすれば、

$$\{\delta_e^m\} = [A] \{\alpha^m\} \quad \text{ここで} \quad \{\alpha^m\} = \{\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m, \alpha_4^m, \alpha_5^m, \alpha_6^m, \alpha_7^m, \alpha_8^m, \alpha_9^m\}^T \quad (3)$$

ひずみと変位の関係は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ r_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & r_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & r_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

従って、ひずみベクトル  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta, r_{rz}, r_{r\theta}, r_{z\theta}\}^T$  を節点変位ベクトル  $\{\delta_e^m\}$  で表わすと、

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \{\alpha^m\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad \text{ここで} \quad [B^m] = [B_c^m] + [B_s^m] \quad (5)$$

$$[B_c^m] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & \frac{D_m}{r} & D_m & \frac{z}{r} D_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad [B_s^m] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{D_m}{r} & -D_m & -\frac{z}{r} D_m & \frac{1}{r} & 0 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{D_m}{r} & -D_m & -\frac{z}{r} D_m \end{bmatrix}$$

但し 左式中  
 $D_m = \frac{m\pi}{\theta_0}$

応力とひずみの関係より、応力ベクトル  $\{\sigma\} = \{\sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \tau_{rz} \tau_{r\theta} \tau_{\theta z}\}^T$  を節点変位ベクトル  $\{\delta_e^m\}$  で表わすと、

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad (6)$$

等方性弾性体では、

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & \text{sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

以上のマトリックス関係式を用いて、仮想仕事の原理より、剛性マトリックス  $[K^m]$  が誘導できる。

$$[K^m] = \int_V [A]^{-1T} [B^m]^T [D] [B^m] [A]^{-1} dV$$

$$= \frac{\theta_0}{2} \int_0^{\theta_0} \int_r [A]^{-1T} \{ [B_c^m]^T [D] [B_c^m] + [B_s^m]^T [D] [B_s^m] \} [A]^{-1} r dr d\theta \quad (8)$$

$$(\because \int_0^{\theta_0} \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \int_0^{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \frac{\theta_0}{2}, \int_0^{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = 0)$$

荷重項は

$$\{F\} = \{F_r^m F_\theta^m F_z^m\}^T \frac{\theta_0}{2}$$

ここで、等分布荷重の場合  $\{F_e^m\} = \frac{2P\theta_a}{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta_a}{\theta_0}$  但し、 $P$ ; 単位長さ当りの荷重強度、 $\theta_a$ ; 載荷幅を与える中心角の  $1/2$ 、 $\theta_x$ ; 載荷部重心までの中心角。

本報告においては、 $\theta_0 = 2\pi$ 、 $\theta_a = \theta_x = \pi$ 、 $m=0$  で解析を行なった。

### 3. フラットスラブ柱頭部の応力分布

解析に用いた要素分割、断面寸法の代表例を図-2に示す。弾性係数  $E = 1.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.167$ 、等分布荷重  $q = 1600 \text{ kg/m}^2$  で計算を行なった。軸対称荷重を受けた柱では、 $z$  方向変位が一定値に近づくこと、スラブの連続性から、スパン中央点でたわみ角零なることを考え図示の変位拘束条件とした。

まず、ドロップパネル半径  $r_d$  を  $\frac{3}{20} l_x \sim \frac{1}{4} l_x$  にとり計算を行なったところ、図-2中  $c, d$  点付近の応力

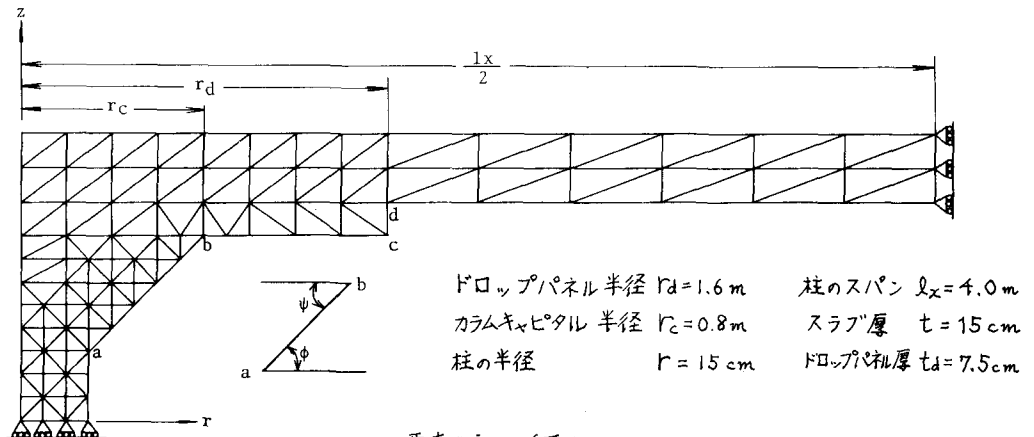
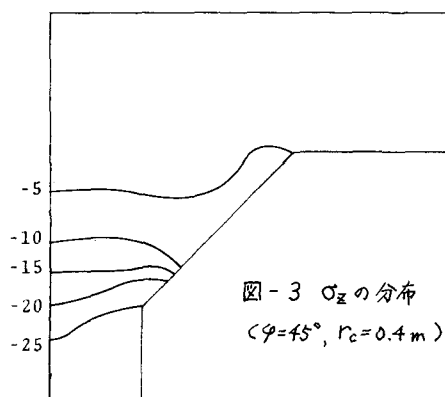


図-2 要素分割と断面寸法



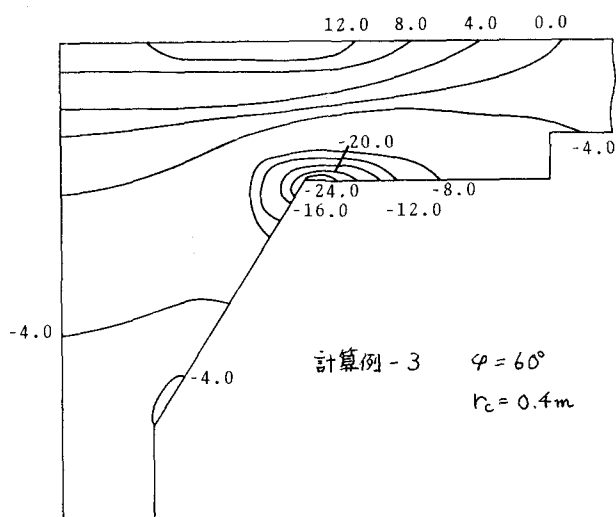
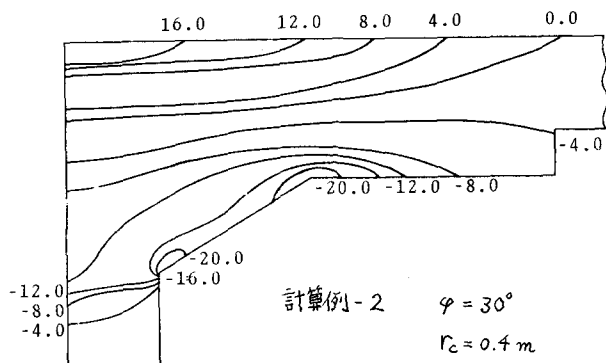
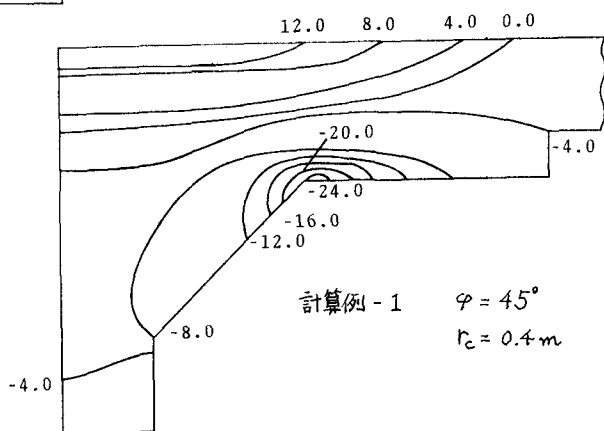
が多少変わる程度で、応力の集中するa, b点付近及び全体の応力分布に殆ど変化がみられなかった。次に、カラムキャピタルの傾斜、半径を変化させたところ、 $\sigma_x$ については図-3に示す応力分布とどれも似た傾向を示したが、 $\sigma_r$ については、興味ある結果を示したので、比較計算を行なった5つの例につき $\sigma_r$ 分布図を掲げその特徴を述べる。なお、説明に用いるa, bはカラムキャピタルが柱、ドロップパネルと交わる点であり、 $\varphi$ ,  $\psi$ はカラムキャピタルが水平、ドロップパネルとなす角である。(図-2参照)

計算例-1は図-2に示した断面であり、示方書の規定に基いたものである。計算例2~5と計算例1とを比較していえる特徴は次のようである。

- ①  $\psi < 45^\circ$  とすると、b点付近の応力は減少するが、代わりにa点付近で応力集中を生じる。但し、その値はb点付近の応力値を越えない。
- ②  $r_c = \frac{d_x}{10}$ ,  $\varphi > 45^\circ$  とするとb点付近にある $\sigma_r$ の最大値は変わらず、a点付近の応力だけが減少する。
- ③  $r_c > \frac{d_x}{10}$  とするとb点付近の応力は減少するが、断面が大となり不経済である。
- ④  $r_c < \frac{d_x}{10}$  とするとb点付近に大きな応力集中を生じ、その値は $\sigma_r$ 最大値を上回った。

#### 4. 結論

示方書では、ドロップパネル長さ $a$ を $\frac{2}{10}d_x$



と規定しているが、 $r_c$ を多少変化させても、ドロップパネル縁付近の応力が多少変化するだけで、その値はa、b点付近の応力に比べ小さいから、 $r_c$ は $\frac{2}{10}l_x$ よりやや小さくても良さそうだ。逆に、カラムキャピタルについては、上述のように $r_c < \frac{l_x}{10}$ で大きな応力集中を生じること、 $r_c > \frac{l_x}{10}$ では断面が大となり不経済となることからみて、 $r_c = \frac{l_x}{10}$ で妥当と思われる。

更に示方書では、角 $\psi$ について、

$\psi > 45^\circ$  なるときは $\psi = 45^\circ$ 内の断面を有効として計算するよう指示しているが、前述②から及び経済面からみて $\psi = 45^\circ$ の断面を採用するのが良いようである。応力集中、経済性から、計算例-2 ( $\psi < 45^\circ$ ) に示す断面が最適のように思えるが、せん断力に着目した際計算例-2のa点付近で最大せん断力を生じたことを付記しておく。

##### 5. あとがき

これまでの計算例は、スパン $l_x$ 、柱半径 $r_c$ 、スラブ厚 $t$ 、ドロップパネル厚 $t_d$ 等を

固定して行なったもので、今後、断面、荷重等を変化させた計算を行ない、比較検討を進める予定である。

なお、本計算には北大大型計算機センターのFACOM 230-75を使用した。

最後に、本研究において助言を頂きました、本学土木工学科尾崎誠教授、松岡健一助教授に感謝の意を表します。

##### <参考文献>

- 1) 吉田徳次郎 鉄筋コンクリート設計方法
- 2) 土木学会 コンクリート標準示方書
- 3) O.C. Zienkiewicz "The Finite Element Method in Engineering Science"
- 4) 尾崎、橋本 曲線折板構造の立体的解析 土木学会北海道支部 昭和49年度 研究発表論文報告集
- 5) 中村、竹本 同心円状に異質な円環を含む有限円柱の3次元応力解析について  
土木学会北海道支部 昭和50年度 研究発表論文報告集

