

片持ち矩形板の曲げモーメント影響面について

室蘭開発建設部

佐久間 達男

北海道開発コンサルタント(株) 正員 ○金沢 義輝

1. まえがき

ケーソンの設計において、ブロック毎の隔壁、側壁、底版を各々、種々の境界条件を有する矩形板要素と仮定して、独立に板の解析をすることは、一般に行なわれていることであり、これに呼応して、運輸省第2港湾建設局では、既に「板の計算図表 1) 3辺固定, 1辺自由板, 2) 2辺固定, 2辺自由板, 3) 4辺固定板」(昭和38年)を作製し、計算の便を計っている。しかしながら、特殊なケースとして、フーチングを有するケーソンの場合、進水時、フーチングにジャッキアップ等の集中荷重が作用する場合があります、1辺固定, 3辺自由板、いわゆる、片持ち板の解析が必要となるが、これについて、著者の知る限りでは、1辺固定, 相対自由辺の、ポアソン比零の無限板に関するPucherの影響面が一般に用いられているのみである。この実を考慮して、本論文は、辺長比が1:1以上の片持ち板を対象として、差分法により解析し、正方形の片持ち板の場合について、解の精度の検討を行なった。また、曲げモーメント影響面の図化例を最後に示し、補足として、現行の道路橋示方書(6.1.4)に関連して、無限板についても述べた。

2. 基本微分方程式及び断面力

微小変形を仮定し、せん断変形を無視する。たわみを w 、板剛度を K とすると、平板の基本微分方程式は、

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{K} \quad \text{-----(1)}$$

あるいは、便宜的に、

$$\nabla^2 u = q/K, \quad \nabla^2 w = u \quad \text{-----(2)}$$

また、断面力とたわみの関係は、Kirchhoffの仮定により

$$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{-----(3)}$$

$$\bar{Q}_x = -K \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}, \quad \bar{Q}_y = -K \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\},$$

$$R = -2(1-\nu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{-----(4)}$$

但し、 R は隅角の反力である。

3. 差分方程式の誘導

注目する板内の1点を00とし、図-2のようにNetworkを設ける。

(1) 一般の内点

図-2に従って、基本微分方程式(2)を差分方程式に表わす

$C = (\lambda_y / \lambda_x)^2$ とすると、

$$C(u_{10} + u_{01}) - 2(1+C)u_{00} + u_{01} + u_{10} = \frac{\bar{q}_{00}}{K} \lambda_y^2 \quad \text{-----(5a)}$$

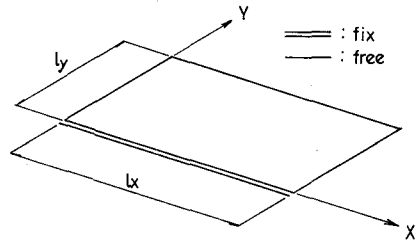


図-1. 片持ち板

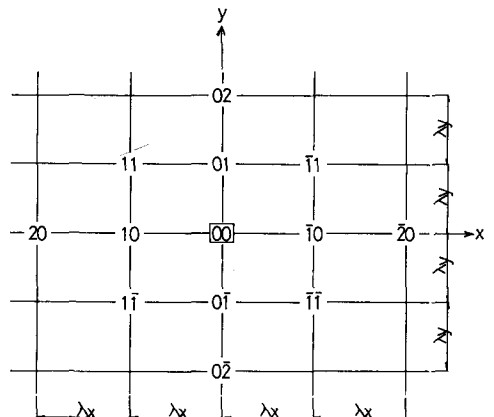


図-2. Network

$$\begin{aligned}
U_{00} &= \{C(W_{10} + W_{10}) - 2(1+C)W_{00} + W_{01} + W_{0\bar{1}}\} / \lambda_y^2, \\
U_{10} &= \{C(W_{\bar{1}0} + W_{00}) - 2(1+C)W_{10} + W_{11} + W_{1\bar{1}}\} / \lambda_y^2, \\
U_{10} &= \{C(W_{00} + W_{20}) - 2(1+C)W_{10} + W_{11} + W_{1\bar{1}}\} / \lambda_y^2, \\
U_{01} &= \{C(W_{11} + W_{1\bar{1}}) - 2(1+C)W_{01} + W_{02} + W_{0\bar{2}}\} / \lambda_y^2, \\
U_{0\bar{1}} &= \{C(W_{1\bar{1}} + W_{11}) - 2(1+C)W_{0\bar{1}} + W_{00} + W_{0\bar{2}}\} / \lambda_y^2
\end{aligned}
\tag{5b}$$

式(5b)を式(5a)に代入し、 W について整理すると式(6)を得る。

ここで、片持ち板の時の境界条件を示すと、

i)自由辺 (x軸に直角)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0$$

ii)自由辺 (y軸に直角)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

iii)固定辺 (y軸に直角)

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

iv)自由な隅点

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0$$

(2)自由辺上の一般点 (y軸に直角)

自由辺上の境界条件式(8)を点 $10, 00, \bar{1}0$ に用いる。 $D = C(1-\nu)$ とすると、

$$\begin{aligned}
U_{01} &= U_{0\bar{1}} - D\{(W_{11} - W_{1\bar{1}}) - 2(W_{01} - W_{0\bar{1}}) + (W_{11} - W_{1\bar{1}})\} / \lambda_y^2, \\
U_{00} &= D(W_{10} - 2W_{00} + W_{10}) / \lambda_y^2, \\
U_{10} &= D(W_{\bar{1}0} - 2W_{10} + W_{00}) / \lambda_y^2, \\
U_{10} &= D(W_{00} - 2W_{10} + W_{20}) / \lambda_y^2
\end{aligned}
\tag{11a}$$

$$W_{01} = 2W_{00} - W_{0\bar{1}} + (D-C)(W_{10} - 2W_{00} + W_{10}),$$

$$W_{11} = 2W_{10} - W_{1\bar{1}} + (D-C)(W_{\bar{1}0} - 2W_{10} + W_{00}),$$

$$W_{11} = 2W_{10} - W_{1\bar{1}} + (D-C)(W_{00} - 2W_{10} + W_{20})$$

----- (11b)

$U_{0\bar{1}}$ については、式(5b)を用い、式(11a)、(11b)を式(5a)に代入すると、式(12)を得る。

(3)自由辺の隅点近傍の内点

式(7)、(8)をそれぞれ点 $10, 01$ に用いると、

$$U_{10} = D(W_{11} - 2W_{10} + W_{1\bar{1}}) / C \lambda_y^2,$$

$$U_{01} = D(W_{11} - 2W_{01} + W_{1\bar{1}}) / \lambda_y^2$$

----- (13)

$U_{00}, U_{10}, U_{0\bar{1}}$ については、式(5b)を用い、式(13)を式(5a)に代入すると、式(14)を得る。

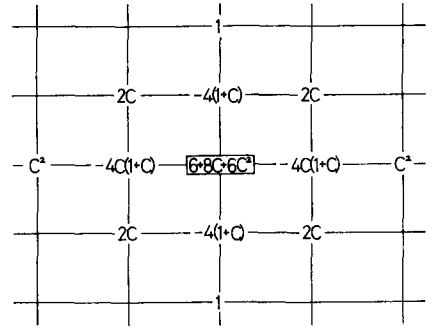
(4)自由辺の隅点

点 00 には式(7)、(8)(10)を、点 $\bar{1}0$ には式(8)を、点 $0\bar{1}$ には式(7)を用いると、

$$U_{10} = U_{10} + D\{(W_{11} - W_{1\bar{1}}) - 2(W_{10} - W_{10}) + (W_{11} - W_{1\bar{1}})\} / C \lambda_y^2,$$

$$U_{01} = U_{0\bar{1}} - D\{(W_{11} - W_{1\bar{1}}) - 2(W_{01} - W_{0\bar{1}}) + (W_{11} - W_{1\bar{1}})\} / \lambda_y^2,$$

$$U_{00} = 0, \quad U_{10} = D(W_{\bar{1}0} - 2W_{10} + W_{00}) / \lambda_y^2,$$



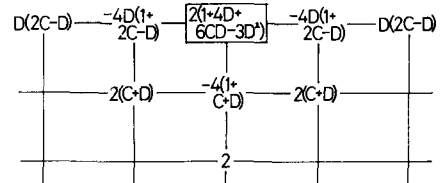
$$x W = \frac{\bar{\sigma}_{00} \lambda_y^2}{K} \tag{6}$$

----- (7)

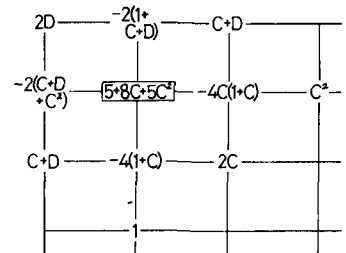
$$\tag{8}$$

$$\tag{9}$$

$$\tag{10}$$



$$x W = \frac{\bar{\sigma}_{00} \lambda_y^2}{K} \tag{12}$$



$$x W = \frac{\bar{\sigma}_{00} \lambda_y^2}{K} \tag{14}$$

$$U_{0T} = D(W_{00} - 2W_{0T} + W_{0Z})/C\lambda_y^2 \quad \text{-----}(15a)$$

$$\begin{aligned} W_{10} &= 2W_{00} - W_{10}, \quad W_{01} = 2W_{00} - W_{0T}, \\ W_{11} &= 2W_{10} - W_{1T} + (D-C)(W_{20} - 2W_{10} + W_{00}), \\ W_{1T} &= 2W_{0T} - W_{1T} + (D-C)(W_{00} - 2W_{0T} + W_{0Z})/C^2, \\ W_{11} &= 2W_{10} - 3W_{1T} + 2W_{0T} + (D-C)\{W_{20} - 2W_{10} + W_{00} \\ &\quad + (W_{00} - 2W_{0T} + W_{0Z})/C^2\} \end{aligned} \quad \text{-----}(15b)$$

式(15a), (15b)により式(16)を得る。

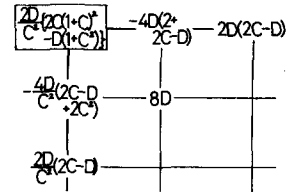
(5)自由辺と固定辺の交点近傍の自由辺上の点

点 O_T, T_T には固定辺の境界条件式(9)を, 点 O_1, O_0 には自由辺の境界条件式(7)を用いると,

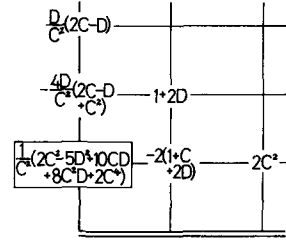
$$\begin{aligned} U_{10} &= U_{10} + D\{(W_{1T} - W_{11}) - 2(W_{10} - W_{10}) - W_{1T}\}/\lambda_y^2, \\ U_{01} &= D(W_{02} - 2W_{01} + W_{00})/C\lambda_y^2, \quad U_{00} = D(W_{01} - 2W_{00})/C\lambda_y^2, \\ U_{10} &= \{W_{1T} - 2W_{10} + C(W_{20} - 2W_{10} + W_{00})\}/\lambda_y^2, \\ U_{0T} &= 2W_{00}/\lambda_y^2 \end{aligned} \quad \text{-----}(17a)$$

$$\begin{aligned} W_{11} &= 2W_{01} - W_{1T} + (D-C)(W_{02} - 2W_{01} + W_{00})/C^2, \\ W_{10} &= 2W_{00} - W_{10} + (D-C)(W_{01} - 2W_{00})/C^2 \end{aligned} \quad \text{-----}(17b)$$

以上, 境界条件の複雑となる場合についてのみ, 差分方程式を誘導したが, 他の点についても同様にして差分方程式が得られる。



$$xW = \frac{\bar{g}_{00}\lambda_y^2}{K} \quad \text{-----}(16)$$



$$xW = \frac{\bar{g}_{00}\lambda_y^2}{K} \quad \text{-----}(18)$$

4. 差分法による解の精度

差分法による解の精度が分割数と平板の境界条件によって異なることは周知のことであり, 境界条件については固定辺のある板では精度が悪いとされている。正方形片持ち板の曲げモーメントについて, 有限要素法, 厳密解との比較を行なったのが表-1.である。ここで, 差分法は(8×8)分割とし, 荷重状態は次の通りである。

表-1. 解の比較 (ν=0.3)

method	Case-1(xP)		Case-2(xply)	
	Mx,max	My,max	Mx,max	My,max
FDM	0.617	-1.134	-0.331	-1.104
FEM*	0.739	-1.130	-0.330	-1.100
exact	—	-1.113	—	-1.061

(※) ICES STRUDL-II による。

Case-1. 固定辺に相対する自由辺の中央に集中荷重(P)が作用した場合

Case-2. 固定辺に相対する自由辺全辺に等分線荷重(y)が作用した場合

表-1.によると, 差分法の厳密解との誤差は4%内外であり, 全般的に, 有限要素法とほぼ同程度の精度を有していることがわかる。

補足ではあるが, Case-1.の荷重状態について, ポアソン比を $\frac{1}{6}$ として, 辺長比-最大曲げモーメント曲線を求めたのが図-3.である。現行道路橋示方書(6.1.4)ではモーメント式算定に級数解法が用いられて, 無限板が解析対象となった。そして, 辺長比が2以上の板について, 曲げモーメント式を規定している。差分法による本解析においても, 図-3.からわかるように, 曲げモーメントの値は, 辺長比が2を越えたあたりからほぼ収束状態にある。

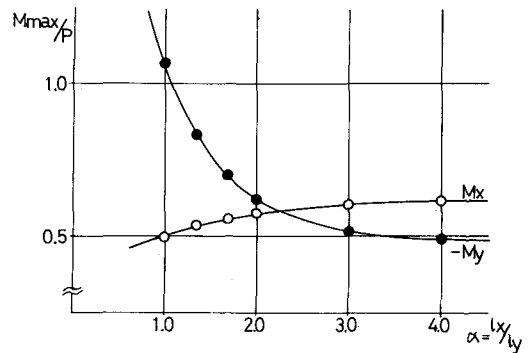


図-3. 無限板への収束

5. 曲げモーメント影響面

曲げモーメント影響面の計算例として、辺長比4、鉄筋コンクリート板を対象として、ポアソン比 $\frac{1}{6}$ の片持ち板を選んだ。分割数は (24×6) とし、着目点を、固定辺中央点の M_y 、及び固定辺に相対する自由辺中央点の M_x とした場合の影響面を、等高線の間隔を0.1として、図-4、5に示した。但し、図の作製には、自動製図システム-D RASTEM 5000-を用い、円弧近似の曲線で補間して求めた。

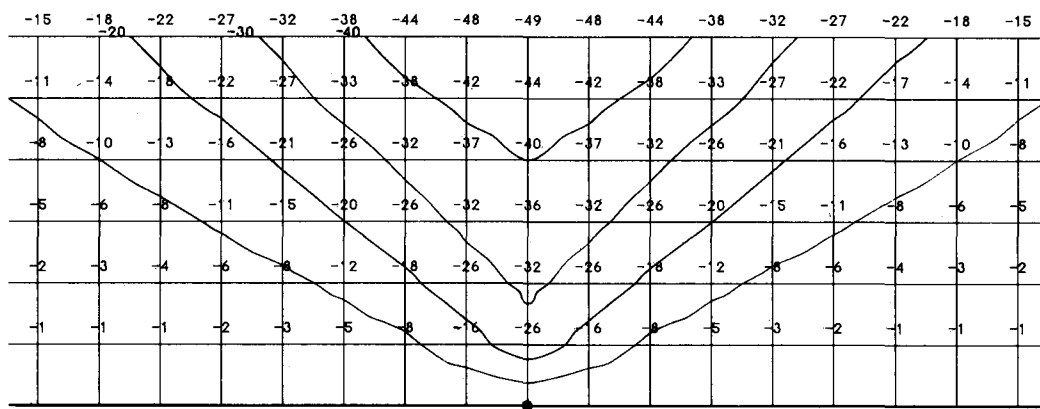


図-4. 固定辺中央点の M_y の影響面 ($\times 10^{-2}$)

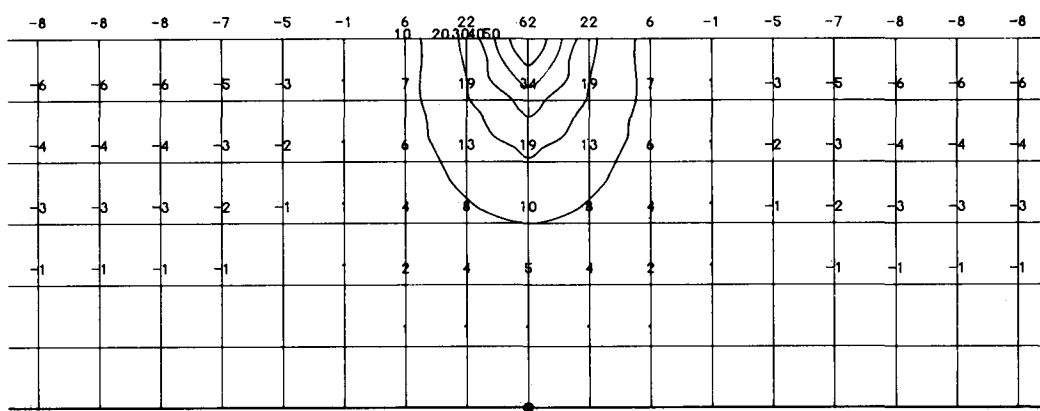


図-5. 自由辺中央点の M_x の影響面 ($\times 10^{-2}$)

6. あとがき

片持ち板で問題となるのは、固定辺と自由辺の交点であるが、差分法による本解析では、この交点の曲げモーメントについて十分な精度が得られなかった。しかし、最大モーメントの発生する点は、この交点から離れた固定辺上にあり、それについては4.でも述べたように十分な精度が得られている。従って、実用上問題は無いものと思われる。また、このようにして得られる曲げモーメント影響面は、ケーソンのフーチングのみならず、道路橋の床版等にも準用できる。最後に、当時、室蘭開発建設部 苫小牧港湾建設事務所 第2計画課長 安彦和之氏に謝意を表す。

参考文献；1) 原口 忠次郎 “弾性基礎上の矩形板” 山海堂、1964.

2) 能町 純雄 “カンテレーバ-矩形板の曲げについて” 土木学会論文集第60号、1959.1.