

流域地形構造と統計則(3)

北海道大学 工学部 正員 藤田睦博

1 まえがき

流域の地形構造に関して、河道位数の概念を基本とする種々の地形則が得られている。水流を位数化する方法は種々あるが、最も一般的なStrahlerの方式を用いる。この方式は、図1.1に示すように水系網において最上流の水流を1位の水流として1位の水流と1位の水流が合流して2位の水流ができ、2位の水流と2位の水流が合流すると3位という順序で、水流の位数は1位ずつ増加する。ただし低位の水流と高位の水流が合流しても、その位数は変化しない。

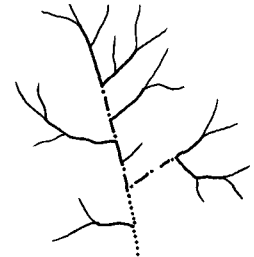


図 1.1 Strahler

方式による河道区分
 — 1位の河道
 — 2位の河道
 - - - 3位の河道
 4位の河道

このように水系網を位数により順序づけて、次の地形則が得られている。

$$\text{河道位数則} \quad N_u = R_b^{k-u} \quad (1.1)$$

$$\text{河道長則} \quad \bar{L}_u = \bar{L}_1 R_L^{u-1} \quad (1.2)$$

$$\text{河道勾配則} \quad \bar{S}_u = \bar{S}_1 R_S^{-(u-1)} \quad (1.3)$$

$$\text{集水面積則} \quad \bar{A}_u = \bar{A}_1 R_A^{u-1} \quad (1.4)$$

ここに $N_u, \bar{L}_u, \bar{S}_u, \bar{A}_u$ は、それぞれ位数 u の河道数、河道の平均長、河道の平均勾配及び位数 u の河道が排水する平均集水面積を示す。 k は流域の最大位数を示す。 R_b, R_L, R_S, R_A は、それぞれ分岐比、流長比、勾配比及び面積比と呼ばれ、一流域において2~5の一定値をとるとされている。表1.1,表1.2は、島野¹, Yang²らによる実測例を示す。これら両実測例は、極めて類似しており、(1.1) ~ (1.4)式の適合することを示している。又Yang²は、 ΔH_u を位数 u の水流の上流端と下流端の平均落差とし、エントロピー理論より $\Delta H_u = \text{一定値}$ であることを指摘して、新しい指標である落差比 $R_p = R_S / R_L$ を提案して $R_p = 1$ なることを示している。

一方流域の地形構造が出水特性に及ぼす影響について考察する場合、上述したStrahler方式の河道位数に基づく地形則では現象を十分に把握できない。すなわち低位の水流と高位の水流が合流してもその位数が変化せず、合流に伴う水理学的、河川形態学的挙動の変化が無視されている。Scheidegger³は、Strahler方式では水流の合流に伴う結合則の成立しないことを考慮して、「矛盾のない河道位数」を提案しているが複雑で一般化していない。Shreve⁴は、Scheideggerの

表 1.1 北海道内における実測例

方式を単純化し、Melton⁵の水系網におけるグラフ理論的考察を導入してリンクの概念を適用した。この方式は、図1.2に示すように水源に発する河道を外部リンク(exterior link),合流点間を結ぶ河道を内部リンク(interior link)と区分する。

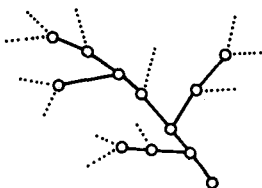


図 1.2 Shreveの方式

による河道区分
 ○—○ 内部リンク
○ 外部リンク

河川名	分岐比 R_b	流長比 R_L	勾配比 R_S	面積比 R_A	落差比 R_p
渚滑川 (北見)	4.281	2.291	2.281	4.569	0.996
藻べつ川	3.879	2.242	2.234	4.251	0.997
湧別川	4.183	2.222	2.094	4.487	0.942
佐呂間別川	4.339	2.340	2.378	4.630	1.016
日高幌別川 (日高)	3.803	1.999	2.134	3.989	1.068
元浦川	4.513	2.503	2.538	5.022	1.014
晃舞川	4.537	2.398	2.399	4.551	1.001
三石川	4.483	2.466	2.428	4.864	1.039
静内川	4.197	2.336	2.205	4.344	0.944
新冠川	4.515	2.510	2.332	4.581	0.929
厚別川	4.158	2.369	2.581	4.577	1.089
沙流川	4.416	2.487	2.468	4.811	0.992
鷗川	4.430	2.403	2.463	4.727	1.025
遠別川 (留萌)	4.606	2.357	2.239	4.587	0.950
築別川	3.940	2.340	2.348	4.396	1.003
羽幌川	4.257	2.486	2.378	4.640	0.957
古丹別川	3.913	2.421	2.509	4.127	1.034
小平菜川	3.973	2.173	2.396	4.103	1.103
留萌川	4.435	2.585	2.753	4.905	1.065

magnitude 1のリンクは、水源に
 発し合流点で終る。magnitude
 2以上のリンクは、合流点で始ま
 り合流点で終る。従ってリンク
 のmagnitudeは、そこへ流入する
 水源の数に等しい。このlink—
 magnitude方式による水系網の区
 分法が、地形構造と水文現象を
 結びつける場合、極めて都合の
 よいことは既に島野², 藤田^{6,7},
 岩佐⁸らにより指摘されている。
 しかしながら、Shreveのこの方
 式はStrahlerの方式ほど一般化
 されておらず、実測例も乏しく
 十分に研究されていない。

表 2.2 米国における実測例(Yang)

河川名	分岐比 R_b	流長比 R_L	勾配比 R_s	面積比 R_A	落差比 R_p
Big Muddy, Ill.	3.287	2.092	2.065	2.907	0.987
Big Sandy, Ky.	3.931	2.415	2.423	4.926	1.003
Colorado, Colo.	4.104	2.141	2.115	5.025	0.988
Kaskaskia, Ill.	4.055	2.123	2.094	4.367	0.986
Mackinaw, Ill.	3.877	1.980	1.929	3.831	0.974
Merrimack, N.H.	4.468	2.558	2.612	3.509	1.021
Neches, Tex.	4.787	2.463	2.455	3.759	0.997
Roanoke, N.C.	4.306	2.101	2.100	5.155	1.000
Rogue, Oreg.	3.721	2.066	2.123	3.236	1.028
Sangamon, Ill.	3.736	1.852	1.866	3.289	1.008
Spoon, Ill.	3.999	2.110	1.904	3.436	0.902
Susquehanna, N.Y.	3.987	2.342	2.532	4.149	1.081
Vermilion, Ill.	3.967	1.905	1.809	2.320	0.950
White, Ind.	4.513	2.353	2.349	4.149	0.998

本論文においては、これらのことを考慮してStrahlerとShreveの河道区分方式を比較し、特に(1.1)～(1.4)式に示す地形則がShreveの方式を用いると、どのように変換されるか若干の考察をした。

2 河道位数とリンク

図1.1のStrahler方式と図1.2のShreve方式の河道区分法を比較すると、位数uの河道は種々のmagnitudeから成る複数個の内部リンクから形成されている。ただしmagnitude 1のリンクは、位数1位の河道と一致している。magnitude Nの河道網(以後Z=Nの河道と呼ぶ)の最下流の内部リンクの位数のとり得る範囲は、 $N \geq 2$ として

$$2 \leq u \leq [\log_2 2N] \quad ([] \text{ Gaussian Notation }) \quad (2.1)$$

各内部リンクには、位数とmagnitudeが対応していると考えることができる。Z=Nの河道網において位数u, magnitude k の内部リンク数の期待値 $q(u, k, N)$ を求める。

図2.1に示すようにZ=Nの河道網の最下流の合流点で河道網を切断して、それぞれ2個の河道網においてmagnitudeが i, (N-i) となる河道網のパターン群を $P_s(i, N-i)$, このパターンの生起確率を $P(i, N)$ とすると、河道網形成過程におけるランダム性を考慮して次式を誘導できる。⁷

$$\begin{aligned} P(1, N) &= \frac{N}{2N-3} \\ P(i, N) &= \frac{2(2i-3)! N! (N-2)! (2N-2i-2)!}{(i-1)! i! (N-i)! (2N-3)! (N-i-1)!} \\ &\quad (2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m) \\ P(m, 2m) &= \frac{8m}{(4m-2)!} \left\{ \frac{(2m-1)! (2m-3)!}{m! (m-2)!} \right\}^2 \quad (N=2m) \end{aligned} \quad (2.2)$$

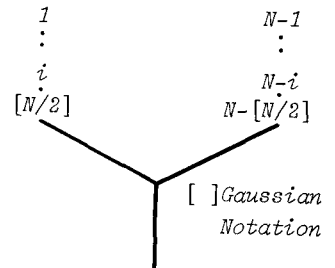


図 2.1

したがって $q(u, k, N)$ は、 $P_s(i, N-i)$ の河道網パターンを考えたと $q(u, k, i)$, $q(u, k, N-i)$ から構成されている。したがって次式を誘導できる。

$$\begin{aligned} q(u, k, N) &= \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \{ q(u, k, i) + q(u, k, N-i) \} \\ &\quad 2^{u-1} \leq k \leq N-1, \quad q(u, k, 1) = 0 \quad k > 1 \\ q(2, 2, 2) &= q(2, 3, 3) = 1, \quad q(2, 1, 2) = q(3, 1, 3) = q(3, 2, 3) = 0 \\ q(u, N, N) &= q(u, N) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここに $Q(k, N)$ は、 $Z=N$ の河道網で最下流の河道が位数 u をとる確率で、この値は既に高棹⁹ 及び著者⁷ により求められているので省略する。図2.2に $q(u, k, N)$ を数値計算した結果を示す。

$q_s(u, N)$ を次式で定義すると

$$q_s(u, N) = \sum_{k=2^{u-1}}^N q(u, k, N) \quad (2.4)$$

$q_s(u, N)$ は、 $Z=N$ の河道網における位数 u の内部リンク数の期待値を示している。又 $Z=N$ の河道網の内部リンクの数は、 $(N-1)$ 個なので次式を満足している。

$$\sum_{u=2}^{[Log_2 2N]} \sum_{k=2^{u-1}}^N q(u, k, N) = N-1 \quad (2.5)$$

$q_s(u, N)$ の計算結果を図2.3に示す。図によると

$$\frac{q_s(u, N)}{q_s(u-1, N)} = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

が成立している。

一方 $Z=N$ の流域を考えると、この流域は(2.1)式で示される種々の位数から成る部分流域により構成されている。 $E\{M_{N,u}\}$ を、これら位数 u の部分流域数の期待値とすると高棹⁹ により次式(1/4 則)が求められている。

$$\frac{E\{M_{N,u}\}}{E\{M_{N,u-1}\}} = \frac{1}{4} \quad (2.7)$$

(2.7)式の $E\{M_{N,u}\}$ は、(1.1)式の N_u に相当しているので分岐比 R_b の期待値が4になることを示している。内部リンクの平均的長さを $\bar{L}_{in}$ とおくと、位数 u の河道長 $\bar{L}_u$ は、 $u \geq 2$ として

$$\bar{L}_u = \frac{\sum_{k=2^{u-1}}^N q(u, k, N) \bar{L}_{in}}{E\{M_{N,u}\}} \quad (2.8)$$

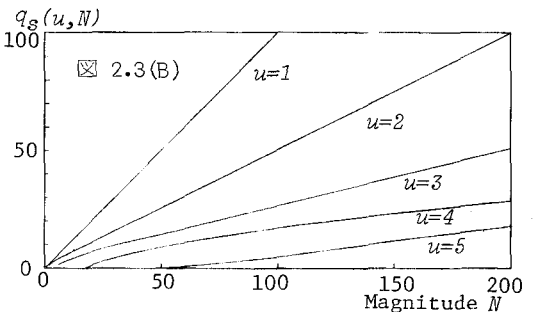
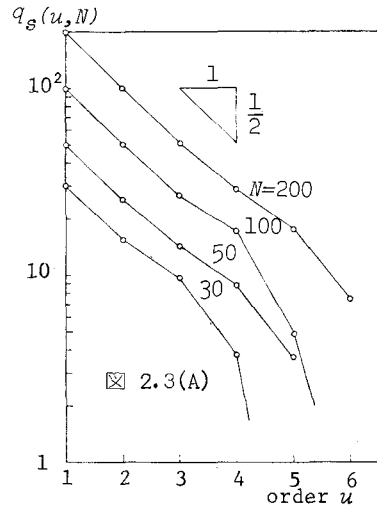
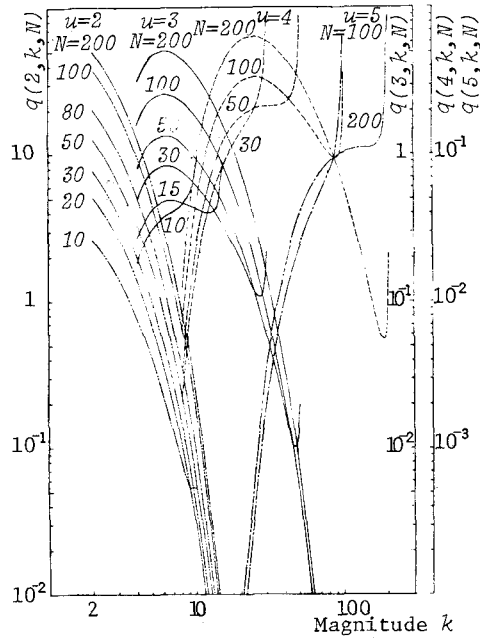
したがって(1.2)式の R_L は、(2.8)式を用いて

$$R_L = \frac{\bar{L}_{u+1}}{\bar{L}_u} = \frac{E\{M_{N,u}\} \sum_{k=2^u}^N q(u+1, k, N)}{E\{M_{N,u+1}\} \sum_{k=2^{u-1}}^N q(u, k, N)} = 2 \quad (2.9)$$

$u=1$ の時、magnitude 1 のリンクと位数1位の河道は一致しているので、外部リンク長の期待値を $\bar{L}_{ex}$ として(2.9)式の R_L を求めると

$$R_L = \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}_1} = \frac{\sum_{k=2}^N q(2, k, N) \bar{L}_{in}}{E\{M_{N,2}\} \bar{L}_{ex}} \quad (2.10)$$

図 2.2 $q(u, k, N)$ の計算



したがって $\bar{L}_2/\bar{L}_1 = R_L$ を求める時のみ、外部リンクと内部リンクの平均的長さ間の関係式が必要である。 α を定数として次式を仮定すると

$$\bar{L}_{ex} = \alpha \bar{L}_{in} \quad (2.11)$$

(2.10)式は

$$R_L = \frac{\sum_{k=2}^N q(2, k, N)}{E\{M_{N,2}\} \alpha} \quad (2.12)$$

(2.6), (2.7)式は、magnitude N が十分に大きい場合、すなわち河道網が十分に発達してYang²の指摘している「動的平衡状態」に達している時成立している。(2.3)式より $q(u, k, N)$ が得られ、 $E\{M_{N,u}\}$ は著者^{6,7}により既に N 毎にその値が求められているので、magnitude N と R_L の関係を得ることができる。この結果を図2.4に示す。図において $u=1$ の場合、(2.12)式に示されているように R_L は定数 α にも関係している。表2.1は、島野¹により得られた

表 2.1 外部リンクと内部リンクの河道長及び集水面積の比較(島野)

河川名	$\frac{\bar{L}_{ex}}{\bar{L}_{in}}$	$\frac{\bar{A}_{ex}}{\bar{A}_{in}}$
渚滑川 (北見)	1.527	1.435
藻べつ川	1.384	1.000
湧別川	1.442	1.246
佐呂間別川	1.315	1.198
日高幌別川(日高)	1.427	1.299
元浦川	1.581	1.428
覺舞川	1.284	1.087
三石川	1.578	1.207
静内川	1.541	1.475
新冠川	1.676	1.636
厚別川	1.490	1.546
沙流川	1.594	1.546
鵡川	1.538	1.543
遠別川 (留萌)	1.438	1.452
築別川	1.221	1.019
羽幌川	1.410	1.267
古丹別川	1.420	1.230
小平葉川	1.472	1.313
留萌川	1.444	1.221

実測例である。実測によると α は 1.5 近傍の値である。したがって図2.4において $u=1$ の時、実線は $\alpha=1$ の場合で、破線は $\alpha=1.5$ の場合を示す。

得られた流長比 R_L は、表1.1 表1.2の実測例と極めて一致している。したがって(1.2)式の河道長則は、Shreveの河道区分方式を採用した時、各内部リンクの長さが内部リンクのmagnitude、位数に独立で、その期待値が等しいということに変換される。

次に集水面積則について吟味してみよう。位数 u の集水面積 A_u は、位数 u 位の河道の排水する面積なので次の量を定義する。 $V(u, k, N)$ を $Z=N$ の流域における位数 u , magnitude u の部分流域の期待値とする。図2.1の $P_g(i, N-i)$ の河道網について考えると magnitude i , magnitude $(N-i)$ の河道網の最大位数 U_1, U_2 は(2.1)式より

$$\begin{aligned} U_1 &= [\log_2 2i] \\ U_2 &= [\log_2 2(N-i)] \quad 1 \leq i \leq [N/2] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$Z=N$ の河道網パターンについては、既に発表しているが、河道網をグラフ理論により識別した例を図2.5に示す。magnitude $i, (N-i)$ の河道網は、複数個のパターンより構成されており、これらのパターンの全て

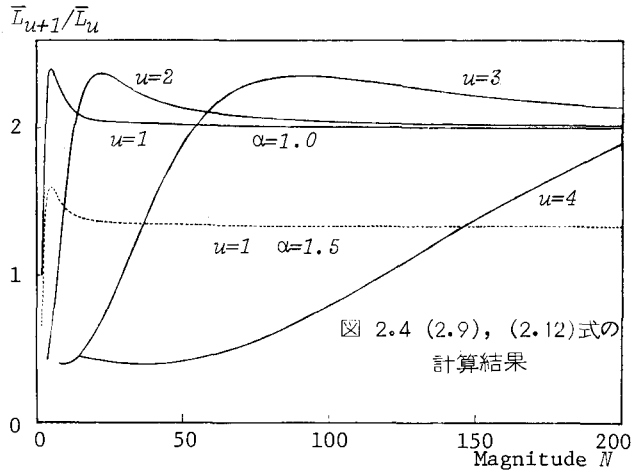


図 2.4 (2.9), (2.12)式の計算結果

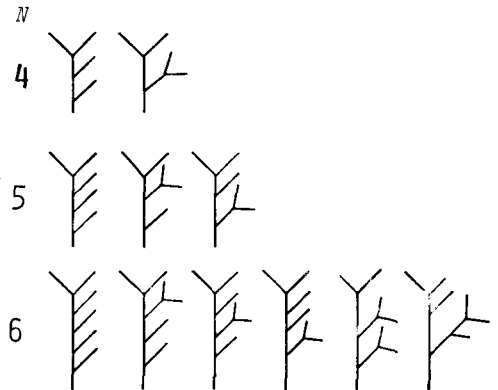


図 2.5 グラフ理論的河道網パターンの識別

の組合せが $P_g(i, N-i)$ の河道網パターンに生じている。したがって表2.2に示すように $P_g(i, N-i)$ の河道網パターンの最大位数が表われる。このことを考慮すると $P_g(i, N-i)$ の河道網に生じる位数 u , magnitude k の部分流域数 $V(u, k, N)$ は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} V^i(u, k, N) &= P(i, N) V(u, k, N-i) & 1 \leq U_1 \leq u \\ V^i(u, k, N) &= P(i, N) \{V(u, k, i) + V(u, k, N-i)\} & U_1 \geq u+1 \\ V(u, i, N) &= P(i, N) Q(u, i) \sum_{j=u}^{U_2} Q(j, N-i) \\ V(u, N-i, N) &= P(i, N) Q(u, N-i) \sum_{j=u}^{U_1} Q(j, i) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$V(u, N, N) = Q(u, N)$$

$$2^{u-1} \leq k \leq N-i-1, k=i, V(u, k, i) = 0 \quad k \geq i+1$$

$$V(2, 2, 2) = V(2, 3, 3) = 1, V(2, 2, 3) = 0$$

$V(u, k, N)$ は、 $V^i(u, k, N)$ を i について加えたものなので

$$\begin{aligned} V(u, k, N) &= \sum_{i=1}^{[N/2]} V^i(u, k, N) \\ 2^{u-1} &\leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.15)$$

$V(u, k, N)$ を k について加えた量は、 $Z = N$ の流域における位数 u の部分流域数の期待値を示すので次式を満足している。

$$E\{M_{N,u}\} = \sum_{k=2^{u-1}}^N V(u, k, N) \quad (2.16)$$

magnitude N の河道網は、 N 個の外部リンク、 $(N-1)$ の内部リンクから成っている。 $\bar{A}_{ex}$, $\bar{A}_{in}$ をそれぞれ外部リンク、内部リンクを含む流域の平均集水面積とおくと、 $Z=N$ の流域の集水面積は

$$\bar{A}_N = (\bar{A}_{ex} + \bar{A}_{in})N - \bar{A}_{in} \quad (2.17)$$

位数 u の部分流域の集水面積の期待値 $\bar{A}_u$ は、 $V(u, k, N)$ を用いて

$$\bar{A}_u = \frac{1}{E\{M_{N,u}\}} \sum_{k=2^{u-1}}^N \{(\bar{A}_{ex} + \bar{A}_{in})k - \bar{A}_{in}\} V(u, k, N) \quad (2.18)$$

したがって面積比 R_A は

$$R_A = \frac{\bar{A}_{u+1}}{\bar{A}_u} = \frac{E\{M_{N,u}\} \sum_{k=2^u}^N \{(\bar{A}_{ex} + \bar{A}_{in})k - \bar{A}_{in}\} V(u+1, k, N)}{E\{M_{N,u+1}\} \sum_{k=2^{u-1}}^N \{(\bar{A}_{ex} + \bar{A}_{in})k - \bar{A}_{in}\} V(u, k, N)} \quad (2.19)$$

(2.19) 式より R_A の値を求めるには、 $\bar{A}_{ex}$ と $\bar{A}_{in}$ の関係式が必要である。 β を定数として (2.20) 式を仮定し、 R_A を求めると

$$\bar{A}_{ex} = \beta \bar{A}_{in} \quad (2.20)$$

$$R_A = \frac{1}{E\{M_{N,u+1}\} \sum_{k=2^{u-1}}^N \{(1+\beta)k-1\} V(u, k, N)} E\{M_{N,u}\} \sum_{k=2^u}^N \{(1+\beta)k-1\} V(u+1, k, N) \quad (2.21)$$

表 2.2 $P_g(i, N-i)$ の河道網各パターンの最大位数の生起過程

$i = 1$	
i	$N-i$
	2 3 3 ... U_2
1	2 3 3 ... U_2

$i \geq 2$	
i	$N-i$
	2 3 3 ... U_2
2	3 3 3 ... U_2
3	3 4 4 ... U_2
3	3 4 4 ... U_2
⋮	⋮
⋮	⋮
U_1	U_1

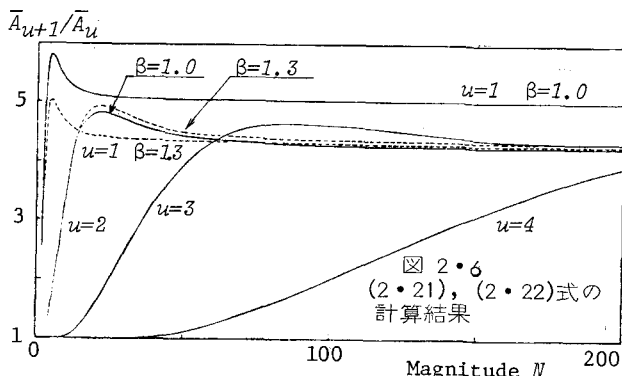


図 2.6
(2.21), (2.22) 式の
計算結果

$u=1$ の時、(2.21)式の面積比 R_A は

$$R_A = \frac{\bar{A}_L}{\bar{A}_1} = \frac{1}{\beta E\{M_{N,2}\}} \sum_{k=2}^N \{(1+\beta)k-1\}V(u,k,N) \quad (2.22)$$

図2.6に面積比 R_A の計算結果を示す。実測による β の値は、表2.1によると α の値より若干小さい。計算によると $R_A = \bar{A}_{u+1}/\bar{A}_u$ の値は、位数 u が大きいと $\beta = 1.0 \sim 1.5$ の範囲内でその値の変化がない。 $u=1, 2$ の時、 β の値の変化により R_A が若干変化する。(図2.6において実線は $\beta = 1.0$,破線は $\beta = 1.3$ の場合を示す。) 実測例に近い $\beta = 1.3$ を用いた時、表1.1, 1.2の実測の R_A に一致する結果を得た。したがって(1.4)式の集水面積則は、Shreveの河道区分法を用いると(2.17)式に変換される。

次に河道勾配則であるが、(2.4)式の $q_s(u, N)$ を用いて次式の $\bar{q}(u, N)$ を求めると

$$\bar{q}(u, N) = q_s(u, N) / E\{M_{N,u}\} \quad (2.23)$$

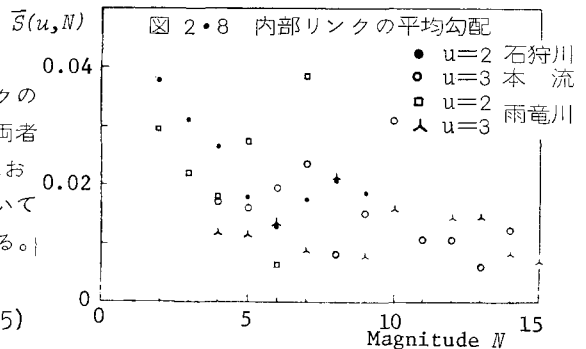
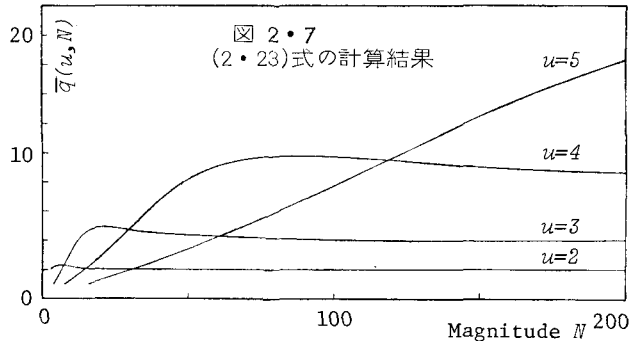
(2.23)式は、位数 u の河道に含まれる内部リンク数の期待値を示す。図2.7は、 $\bar{q}(u, N)$ を図示したものである。Yang²⁾によると位数 u の河道の上下流端の落差 ΔH は、位数に独立で定数であることが示されている。位数 u の内部リンクの平均勾配は、次式で与えられる。

$$\bar{S}(u, N) = \Delta H / \bar{q}(u, N) \quad (2.24)$$

(2.24)式は、内部リンクの平均勾配が内部リンクの長さ及び集水面積と異なり、magnitude, 位数の両者に関係していることを示す。図2.8は、石狩川における実測例である。資料数が十分でなくバラついてはいるが、ほぼ上述の事実を示していると思われる。勾配比 R_S は、(2.24)式を用いると

$$R_S = S_u / S_{u+1} = q(u+1, N) / q(u, N) = 2 \quad (2.25)$$

となり表1.1, 表1.2の実測値と一致している。



3 むすび

Strahlerの河道位数の概念を基本とした地形則が、Shreveのlinkとmagnitudeを基本とする河道区分法を採用すると、どのように変換されるか検討し、次の結論を得た。

河道長則 各内部リンクの長さが、その内部リンクの位数, magnitudeに独立である。

集水面積則 magnitude Nの流域の排水する集水面積は、(2.17)式で表わされる。

河道勾配則 各内部リンクの勾配は、その内部リンクの位数, magnitudeに関係している。

今後これらの結果と出水特性について検討したい。最後に指導いただいた北海道大学工学部山岡教授、資料の整理及び計算に協力された4年目学生坂之井君に謝意を表します。

参考文献

- 1) 高山茂典：河川地形，page 58，共立出版，1974
- 2) Yang, C.T. : Potential energy and stream morphology, Wat. Resur. Res., 7, 311~322, 1971
- 3) Scheidegger, A.E. : The algebra of stream order number, U.S.G.S. Prof. Paper, 525B, 1965
- 4) Shreve, R.L. : Statistical law of stream numbers, J. Geol., 74, 17~37, 1966
- 5) Melton, M.A. : A derivation of Strahler's channel ordering system, J. Geol., 67, 1959
- 6) 藤田睦博：流域地形構造と統計則(2), 土木学会北海道支部論文報告集, 31, 119~124, 1975
- 7) 藤田睦博：流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 234, 1975
- 8) 岩佐義朗, 小林信久, 榎橋通雄：河道ネットワーク構造に関する基礎的研究, 30周年講, 1975
- 9) 石原藤次郎, 高棹琢馬, 瀬能邦雄：河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京大防災研年報, 1969