

収縮せじめれを生じた床版応力の解析について

北大正員 能町純雄

, , 角田与史雄

, , 堺孝司

1. まえがき

鉄筋コンクリートスラブが、コンクリートの収縮によって、ある方向に厚さを貫通するせじめれを生じ、二つに分断されたとしても、鉄筋の連続性が保たれている場合、力の相互伝達が可能である。

着者は、先に、この伝達機構を二つの力学的モデルの採用によって解析を試みた⁽¹⁾。一つは、厚さを貫通するせじめれの位置において、モーメントに対する抵抗がなく、せん断力のみを相互伝達し、そのせん断力に比例したためめ差が生じるような拘束条件のモデル化であり、他の一つは、ためめ差が生じないが、伝達されるモーメントに応じてためめ角差が生じるような拘束条件のモデル化であった。これらのモデルは、極端な状態を想定したものである。実際には、せん断力の伝達に応じてためめ差が生じると同時にモーメントの伝達も生じていると考えることができる。そこで、本報告では、両者を考慮して解析を行なった。解析にあたって次の事を仮定した。(1). 伝達せん断力(鉄筋のDowel力)とためめ差(Dowel変形)の間は線形である。(2). 伝達モーメント(鉄筋引張力)とためめ角差(鉄筋のすべり出し量)の間も線形である。

この仮定の下に、ためめ差の大小を左右するパラメータ K_1 とモーメントのどれのパラメータ K_2 の種々の値に対する床版曲げ応力の変位状況を調べることによって、厚さを貫通するせじめれによる荷重分配の様子を明らかにした。尚、ここで扱う版は、相対する2辺が単純支持の半無限版であり、厚さを貫通するせじめれは、支持辺に垂直に直進を生じるものとした。また、解析は、重調和微分方程式の境界値問題として、Greenの積分を媒介とした有限フーリエ変換を用いて行なった。

2. 有限フーリエ正弦変換

今、 $f(x)$ のフーリエ正弦積分を

$$S_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad \text{とおく} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_m S_m[f(x)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m=1, 2, 3, \dots, 0 < x < a) \quad (1)$$

との関係がある。これは (a, a) , $(0, b)$ に対する矩形領域で積分可能な関数 W_{xy} に代して次のように拡張できる。

$$S_m S_n[W_{xy}] = \int_0^a \int_0^b W_{xy} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$(m, n=1, 2, 3, \dots, 0 < x < a, 0 < y < b)$$

この逆変換は、

$$W_{xy} = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n S_m S_n[W_{xy}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

(1) 能町、角田、堺、「拘束せじめれをモデル化したスラブの曲げについて」土木学会年次講演会概要集 30-I, 昭50

(2) S. P. Timoshenko, 「Theory of Plates and Shells」 2-nd Edition, McGraw-Hill

3. 重調和微分式の Green 積分

W の重調和微分式に対する Green の積分は、

$$\int_0^a \int_0^b \{ (\Delta^2 W) \cdot U - (\Delta^2 U) \cdot W \} dx dy = R(W \cdot U) \quad (3)$$

ただし, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

$$\begin{aligned} R(W \cdot U) = & \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) U \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 U}{\partial y^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy \\ & - \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right) W \right]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) U \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 W}{\partial x^2} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx \\ & + \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^3 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 U}{\partial x^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \right) W \right]_{y=0}^{y=b} dx - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot U - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cdot W \right) \right]_0^a \quad (4) \end{aligned}$$

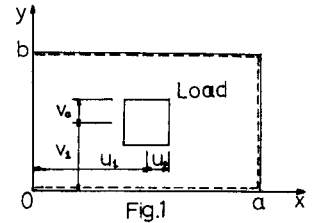
(3) 式の左辺に $U = \sin(m\pi x/a) \cdot \sin(n\pi y/b)$; 及び W 、矩形平板の基礎微分方程式 $\Delta^2 W = q f_{xy}$ ($q f_{xy}$: 荷重強度) を代入して $S_m S_n[W]$ を求めると

$$S_m S_n[W] = \left(\frac{a}{\pi} \right)^4 \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{S_m S_n[f_{xy}]}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \left(\frac{a}{\pi} \right)^4 \frac{R(W \cdot U)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \quad (5)$$

ここで $\alpha_n = a n$ である。さて、今、図.1 に示すような境界条件の板を考える。すなわち、 $W_{y=0} = W_{y=b} = (M_y)_{y=0} = (M_y)_{y=b} =$

$$(M_x)_{x=0} = W_{x=0} = 0, \quad W_{x=a} \neq 0, \quad (M_x)_{x=a} \neq 0.$$

この周辺境界条件によって $R(W \cdot U)$ は、 $S_m[M_{x=0}]$, $S_n[W_{x=0}]$ を未知量として含み $S_m S_n[W]$ は、



$$S_m S_n[W] = \left(\frac{a}{\pi} \right)^4 \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{S_m S_n[f_{xy}]}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \left(\frac{a}{\pi} \right)^4 \frac{m}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} S_n[M_{x=0}] + \frac{a}{\pi} \frac{(m^3 + (2-\nu)m\alpha_n^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} S_n[W_{x=0}] \quad (6)$$

となり、(2) 式の如く逆変換を施すと、更に、 $\sum_m$ について閉じた形にすると

$$\begin{aligned} W = & \frac{q a^4}{D} \sum_m R_m(u_0, u_1, \xi) \sin \frac{m \pi u_0}{b} \sin \frac{m \pi u_1}{b} \sin m \pi \eta - b \sum_m \frac{1}{(m \pi)^2} H_{m,1-\xi} \cdot S_n[M_{x=0}] \cdot \sin m \pi \eta \\ & + \frac{1}{b} \sum_m \{ 2 G_{m,1-\xi} + (1-\nu) H_{m,1-\xi} \} \cdot S_n[W_{x=0}] \sin m \pi \eta \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$

$$G_{m,\xi} = \frac{c h \pi \alpha_m (1+\xi) - c h \pi \alpha_m (1-\xi)}{c h 2 \pi \alpha_m - 1}, \quad H_{m,\xi} = \frac{\pi \alpha_m \{ (1-\xi) s h \pi \alpha_m (1+\xi) - (1+\xi) s h \pi \alpha_m (1-\xi) \}}{c h 2 \pi \alpha_m - 1}$$

$$R_m(u_0, u_1, \xi) = \frac{q}{b} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\alpha_m} \left[-A_m^{(1)} + \begin{pmatrix} B_m^{(2)} \\ B_m^{(2)} \\ -A_m^{(2)} \end{pmatrix} + A_m^{(3)} + \begin{pmatrix} -B_m^{(4)} \\ A_m^{(4)} \\ A_m^{(4)} \end{pmatrix} \right] \begin{matrix} 0 \leq x < \beta \\ \beta \leq x \leq \alpha \\ \alpha < x \leq 1 \end{matrix}$$

$$\alpha = (u_1 + u_0)/a, \quad \beta = (u_1 - u_0)/a, \quad S_{mn} = 1/m(m^2 + \alpha_n^2)^2, \quad A_m^{(1)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\xi + \alpha)$$

$$A_m^{(2)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\xi - \alpha), \quad A_m^{(3)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\xi + \beta), \quad A_m^{(4)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\xi - \beta)$$

$$B_m^{(2)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\alpha - \xi), \quad B_m^{(4)} = \sum_n S_{mn} \cdot \sin m \pi (\beta - \xi)$$

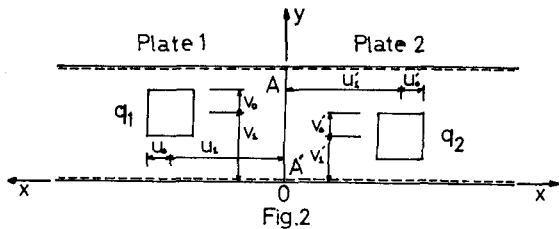
得られた(7)式において $a \rightarrow \infty$ とする事によって相対する2辺が単純支持の半無限板に拡張する事ができる。
すなわち、

$$W = \frac{g b^4}{D} \sum_m R_m(u_0, u_1, \xi)_{a \rightarrow \infty} \cdot \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_2}{b} \sin n\pi \eta - b \sum_m \frac{1}{(n\pi)^2} (H_{m,1-\xi})_{a \rightarrow \infty} S_m[M_{x=0}] \sin n\pi \eta$$

$$+ \frac{1}{b} \sum_m [2G_{m,1-\xi} + (1-\nu)H_{m,1-\xi}]_{a \rightarrow \infty} \cdot S_m[W_{x=0}] \sin n\pi \eta \quad (8)$$

4. 貫通ひびの断面における境界条件

図.2に示すような半無限板のひびの位置 $A-A'$ の境界条件を、反力を R 、たわみ角を θ で表わし $Plate\ 1$, $Plate\ 2$ に関するものに、各々、サフィックス1, 2を付して、



$$(1) (R_1)_{x_1=0} + (R_2)_{x_2=0} = 0 \quad (9)$$

$$(2) \{(\theta_1)_{x_1=0} + (\theta_2)_{x_2=0}\} \cdot K_2 = -(M)_{x=0} \quad (10)$$

$$(3) \{(\omega_1)_{x_1=0} - (\omega_2)_{x_2=0}\} \cdot K_1 = -(R)_{x_1=0} \quad (11)$$

とする。

(9) 式より

$$a_{11} \cdot S_m[W_{x_1=0}] + a_{12} \cdot S_m[W_{x_2=0}] + a_{13} \cdot S'_m[M_{x=0}] = \frac{g_1 b^5}{D} \cdot b_1$$

(10) 式より

$$a_{21} \cdot S_m[W_{x_1=0}] + a_{22} \cdot S_m[W_{x_2=0}] + a_{23} \cdot S'_m[M_{x=0}] = \frac{g_2 b^5}{D} \cdot b_2$$

(11) 式より

$$a_{31} \cdot S_m[W_{x_1=0}] + a_{32} \cdot S_m[W_{x_2=0}] + a_{33} \cdot S'_m[M_{x=0}] = \frac{g_3 b^5}{D} \cdot b_3$$

ここで

$$a_{11} = a_{12} = (\nu + 3(\nu - 1)(n\pi)^3), \quad a_{13} = 2(1 + \nu)(n\pi), \quad a_{21} = a_{22} = K_2(1 + \nu)(n\pi)$$

$$a_{23} = 2(1 + K_2/(n\pi)), \quad a_{31} = 2K_1 + (n\pi)^3(3 - 2\nu - \nu^2), \quad a_{32} = -2K_1, \quad a_{33} = -(n\pi)(1 + \nu)$$

$$b_1 = \frac{2}{(n\pi)^2} \left\{ [(3-\nu) + n\pi(1-\nu) \frac{u_1+u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1+u_2}{b}} + [(\nu-3) + n\pi(\nu-1) \frac{u_1-u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1-u_2}{b}} \right\} \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_2}{b}$$

$$+ \frac{2\xi}{(n\pi)^2} \left\{ [(3-\nu) + n\pi(1-\nu) \frac{u'_1+u'_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u'_1+u'_2}{b}} + [(\nu-3) + n\pi(\nu-1) \frac{u'_1-u'_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u'_1-u'_2}{b}} \right\} \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_2}{b}$$

$$b_2 = \frac{2K_2}{(n\pi)^2} \left\{ -[1 + n\pi \frac{u_1+u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1+u_2}{b}} + [1 + n\pi \frac{u_1-u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1-u_2}{b}} \right\} \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_2}{b}$$

$$+ \frac{2\xi K_2}{(n\pi)^2} \left\{ -[1 + n\pi \frac{u'_1+u'_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u'_1+u'_2}{b}} + [1 + n\pi \frac{u'_1-u'_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u'_1-u'_2}{b}} \right\} \sin \frac{n\pi v'_1}{b} \sin \frac{n\pi v'_2}{b}$$

$$b_3 = -\frac{2}{(n\pi)} \left\{ [(3-\nu) + n\pi(1-\nu) \frac{u_1+u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1+u_2}{b}} + [(\nu-3) + n\pi(\nu-1) \frac{u_1-u_2}{b}] e^{-n\pi \frac{u_1-u_2}{b}} \right\} \sin \frac{n\pi v_1}{b} \sin \frac{n\pi v_2}{b}$$

$$K_2 = b K'_2/D, \quad K_1 = b^3 K'_1/D, \quad S'_m[M_{x=0}] = b^2 S_m[M_{x=0}], \quad \xi = g_2/g_1$$

(12) 式をマトリックス表示すると

$$[A] \cdot \{V\} = \frac{g_1 b^5}{D} [B]$$

(13)

これを解くと

$$\{V\} = \frac{g_1 b^5}{D} [X]$$

5. ためめ及びモーメント

(13) 式に $\delta > \pi$ 得られ未知数 $S_m[w_{x_1=0}]$, $S_m[w_{x_2=0}]$, $S'_m[M_{x=0}]$ を (8) 式に代入すると

$$W_1 = \frac{2b^4}{D} \sum_m \left\{ R_m(u, u_1, \xi_1)_{a \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \nu \nu_1}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2}{b} - \frac{1}{(\pi m)} \frac{\xi_1}{b} e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_3 + [2 + (\pi m)(1-\nu) \frac{\xi_1}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_1 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

$$W_2 = \frac{2b^4}{D} \sum_m \left\{ E R_m(u', u_1', \xi_2)_{a \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \nu \nu_1'}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2'}{b} - \frac{1}{(\pi m)} \frac{\xi_2}{b} e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_3 + [2 + (\pi m)(1-\nu) \frac{\xi_2}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_2 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

とあり、また、モーメントは、このためめを用いて

$$M_{x1} = -g_1 b^2 \sum_m \left\{ [b^2 R''_m(u, u_1, \xi_1)_{a \rightarrow \infty} - \nu (\pi m)^2 R_m(u, u_1, \xi_1)_{a \rightarrow \infty}] \sin \frac{\pi \nu \nu_1}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2}{b} \right.$$

$$\left. - [-2 + (\pi m)(1-\nu) \frac{\xi_1}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_3 + (1-\nu)^2 (\pi m)^3 \frac{\xi_1}{b} e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_1 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

$$M_{x2} = -g_1 b^2 \sum_m \left\{ E [b^2 R''_m(u', u_1', \xi_2)_{a \rightarrow \infty} - \nu (\pi m)^2 R_m(u', u_1', \xi_2)_{a \rightarrow \infty}] \sin \frac{\pi \nu \nu_1'}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2'}{b} \right.$$

$$\left. - [-2 + (\pi m)(1-\nu) \frac{\xi_2}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_3 + (1-\nu)^2 (\pi m)^3 \frac{\xi_2}{b} e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_2 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

$$M_{y1} = -g_2 b^2 \sum_m \left\{ [\nu b^2 R''_m(u, u_1, \xi_1)_{a \rightarrow \infty} - (\pi m)^2 R_m(u, u_1, \xi_1)_{a \rightarrow \infty}] \sin \frac{\pi \nu \nu_1}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2}{b} \right.$$

$$\left. - [-2\nu + (\pi m)(\nu-1) \frac{\xi_1}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_3 + (\pi m)^2 [2(\nu^2-1) - (\nu-1)^2 (\pi m) \frac{\xi_1}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_1}{b}} \cdot X_1 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

$$M_{y2} = -g_2 b^2 \sum_m \left\{ E [\nu b^2 R''_m(u', u_1', \xi_2)_{a \rightarrow \infty} - (\pi m)^2 R_m(u', u_1', \xi_2)_{a \rightarrow \infty}] \sin \frac{\pi \nu \nu_1'}{b} \sin \frac{\pi \nu \nu_2'}{b} \right.$$

$$\left. - [-2\nu + (\pi m)(\nu-1) \frac{\xi_2}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_3 + (\pi m)^2 [2(\nu^2-1) - (\nu-1)^2 (\pi m) \frac{\xi_2}{b}] e^{-\pi m \frac{\xi_2}{b}} \cdot X_2 \right\} \sin \pi \nu \eta$$

6. 数値計算例及び考察

以上、コンクリートの収縮によって板の厚さを貫通するひびわれを有する床版を対応とした一解析方法を示した。図3.4に $\nu_1 = 0.5$, $u_1 = u_0 = \nu_0 = 0.1b$, $E = 0$ の載荷部中央における K_1, K_2 の種々の値に対する曲げ応力を示す。 K_1, K_2 の性質上、あるいは、同力が分るように $K_1 \rightarrow \infty, K_2 \rightarrow \infty$ は、この貫通ひびわれ断面における特別な拘束条件の付いた普通の半無限版にあり、 $K_1 = 0, K_2 = 0$ は、Plate 1 と Plate 2 の間で、力の相互伝達のない場合に相当する。ここで、実際の K_1, K_2 の値が分れば、厚さを貫通するひびわれを有する床版の曲げ応力を知ることが、できるわけであるが、この値は、実験によって決定しなければならない値である。二例は、今後の研究課題としたい。

尚、計算には、北大大型計算機センター Facom 230-60/75 を使用した。

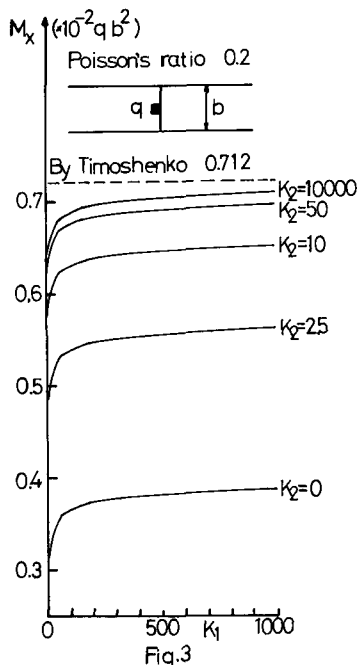


Fig.3

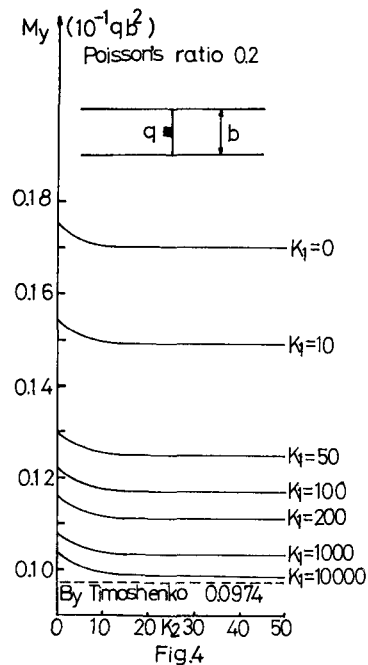


Fig.4