

剛性マトリックス法による立体トラス橋の温度応力

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
北海道大学工学部 〇正員 佐藤 浩一
北海道大学工学部 正員 林川 俊郎

1. まえがき

近年、橋梁構造物の大型化が進むにつれて、熱応力の解析が設計上重要視されるようになってきた。特に、立体構造物としての熱応力解析が必要と思われる。ここでは、立体トラス橋が温度変化を受ける場合について解析しようとするものである。解析方法としては大別して応力法と変形法があるが、マトリックス法は熱応力解析にきわめて有効であるので、本報告では変形法による剛性マトリックスを用いて解析するものである。

2. 温度応力解析

トラスにおいて、静定構造物の場合は熱歪を受けても各節点は変形を生ずるだけで内部応力は生じない。不静定構造物の場合は熱歪を受けると各節点には応力、変形が生ずる。

今、簡単なトラス構造物について、その解析方法を考える。

図-1のように、静定構造物では熱歪を受けても変形を生ずるだけで内部応力は生じない。つまり、節点1-2が加熱され、節点2-3が常温であれば、節点1-2は膨張し、節点2-3は不変である。

図-2のように、もう一本節点を加えると構造物は不静定構造物となる。従って、例えば、節点1-2が加熱されると、各節点には応力、変位が生ずる。このような場合の解析方法は次のように2つの荷重状態を考えることにより処理できる。

(i) 状態1 加熱する前に節点1-2を外しておく。加熱するとこの節点は伸びようとするが、これを完全に阻止するように節点2に圧縮力 P_{2-2}^0 を加える。当然、同じ大きさの反力が節点1に生ずる。もし、他の節点2-3がまた違った温度に加熱されたならば、 P_{2-3}^0 を節点2に加えて自由膨張を防ぐようにする。このようにして、節点2を元の位置に保つようにする。これらの荷重によって生ずる節点力を状態1とする。節点1-2と節点2-3の両方が熱せられた場合を考えると $S_{1-2}^{(1)} = -P_{1-2}^0$ 、 $S_{2-3}^{(1)} = -P_{2-3}^0$ となり、 S はこの場合圧縮力となる。(図-3参照)。ここで、状態1における節点力を計算すると次のようになる。

節点1-2が熱せられて、他の節点より ΔT °C 温度が高くなったとする。 α を線膨張係数とすれば、熱による歪は $\epsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$ で与えられる。これによる節点の伸びは $\Delta L = \epsilon_T \cdot L$ となる。この伸びを抑えるのに必要な P_{1-2}^0 は $P_{1-2}^0 = A \cdot G_T = A \cdot E \cdot \epsilon_T = A \cdot E_T \cdot \alpha \cdot \Delta T$ である。この式の E_T は温度上昇後のヤング率である。鋼の場合の線膨張係数 α は $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$ である。

(ii) 状態2 次に、節点を節点2に接合して元の構造にする。この構造に状態1で求めた節点荷重 P_{1-2}^0 、 P_{2-3}^0 を逆方向に加える。これを状態2とする。(図-4参照)。注意事項として次の2点に留意すべきである。

(a) 状態2では不静定構造であるので、 P_{1-2}^0 などの荷重は状態1と異なり、すべての構成節点に応力、変位が生ずる。

(b) 節点2における外力は、状態1と状態2で打ち消し合って熱応力だけが残る。

状態2の節点力は、 $S_{1-2}^{(2)}$ 、 $S_{2-3}^{(2)}$ 、 $S_{2-4}^{(2)}$ と求められ、同時に変位も求められる。結局、自己平衡系の節点力は状態1と状態2の和であって、 $S_{1-2} = S_{1-2}^{(1)} + S_{1-2}^{(2)}$ 、 $S_{2-3} = S_{2-3}^{(1)} + S_{2-3}^{(2)}$ 、 $S_{2-4} = S_{2-4}^{(1)} + S_{2-4}^{(2)}$ となる。変位は状態2の変形状態

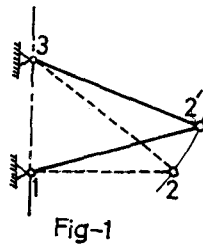


Fig-1

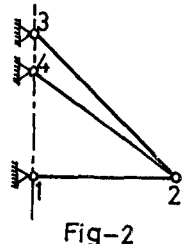


Fig-2

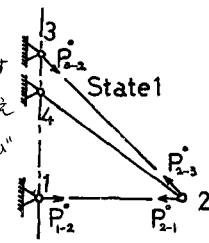


Fig-3

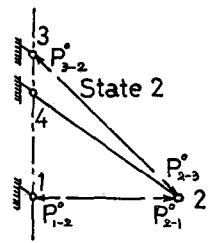


Fig-4

から求められる。また、熱応力以外の外荷重がある場合は、加熱による場合の値と加え合せればよい。

以上の事項をマトリックス法で表示すれば次のようになる。

(i) トラス部材要素が熱を受けて膨脹(あるいは収縮)しようとするとき、この部材要素を熱を受ける以前の状態にしておくために節点に加えるべき力を求める。それには拘束が全くなり場合の部材要素 g の節点の変位 u_i を求める必要がある。図-5のようなトラス部材要素を考え、温度は g 要素内で一様とすると、熱変形の性質から

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_2 - \bar{u}_1 &= \alpha \cdot \Delta T \cdot (x_2 - x_1) \\ \bar{v}_2 - \bar{v}_1 &= \alpha \cdot \Delta T \cdot (y_2 - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

が成立する。ここで、 u_i, v_i は節点 i の x 方向、 y 方向の変位である。

式(1)を行列表示すれば

$$w_g = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \cdot \Delta T \cdot (x_2 - x_1) \\ \alpha \cdot \Delta T \cdot (y_2 - y_1) \end{Bmatrix} = w_g' + w_g'' \quad (2)$$

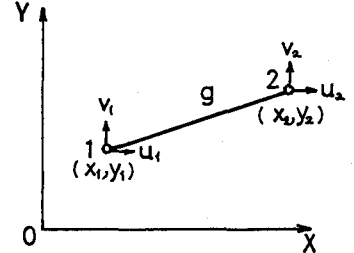


Fig-5

節点変位が零の状態にするためには、要素 g の基準座標系における剛性マトリックスを K_g とすれば、

$$P_g^{(1)} = -K_g w_g \quad (3) \quad \text{なる節点力を加えればよい。式(3)に式(2)を代入すれば、}$$

$$P_g^{(1)} = -K_g w_g' - K_g w_g'' \quad (4) \quad \text{となるが、右辺の第一項は剛体変位なので零となり、結局、}$$

$$P_g^{(1)} = -K_g w_g'' \quad (5) \quad \text{となる。この操作を全ての要素について行なうと、変形を拘束するために必要な節点力が全て求められる。部材要素 g の内力は式(5)で求まる} P_g^{(1)} \text{に前かう座標変換マトリックス} T \text{を掛ければ求まる。}$$

$$\bar{P}_g^{(1)} = T \cdot P_g^{(1)} = -T \cdot K_g w_g'' \quad (6)$$

(ii) (i)で求めた節点力(節点荷重)の符号を変えたものがトラスに加わっているととして、通常のマトリックス法を行ない、変位、応力を求める。

$$KX + X_0 = KU \quad (7)$$

ここで、 K はトラス全体の剛性マトリックスである。

X は外荷重ベクトル、 X_0 は(i)で求まる拘束節点力式(5)

の符号を変えたもの、即ち、 $-P_g^{(1)} = +K_g w_g''$ で求まる温度変化による外荷重ベクトルである。式(7)より、未知節点変位は、次のように求められる。

$$U^{(2)} = K^{-1}(X + X_0) \quad (8), \quad \text{また、断面力(応力)は} P_g^{(2)} = K_g U_g \quad (9)$$

$$\bar{P}_g^{(2)} = T \cdot K_g U_g \quad (10) \quad \text{である。故に、(i)と(ii)を重ね合わせるにより全体の断面力、変位が求まる。}$$

$$\bar{P}_g = \bar{P}_g^{(1)} + \bar{P}_g^{(2)} \quad (11), \quad U = U_g^{(2)} \quad (12)$$

3. 数値計算例

ここでは、図-6のような立体トラスを例にとる。図-6には計算に用いたモデルを示している。6パネルで1パネル7m、幅員7m、高さ7mの寸法で部材断面は上横構水平桁および斜材(25)~(31)、(39)~(50)を30cmとし、対横構(101)~(114)を40cmとし、他の部材はすべて100cmとして計算を行なった。(表-1)。

x, y, z の方向は

図-7のようにとる。

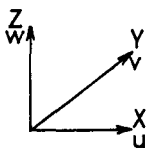


Fig-7

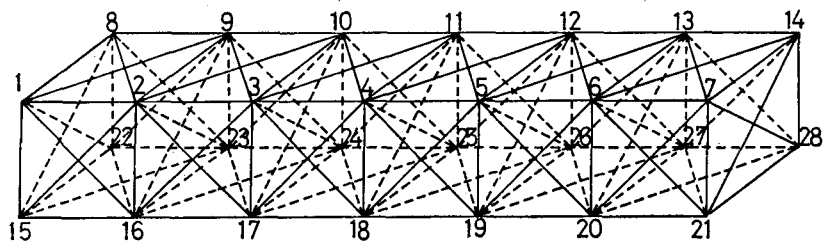


Fig-6

u: x方向変位, v: y方向変位,
w: z方向変位である。

支保条件は、図-6における節点
15, 節点 21, 節点 22, 節点 28 の
4節点をヒンジ支保とした。

また、温度変化は全部材+20°C
とした。図-8, 9, 10, 11, 12には
垂直材(腹材), 上弦材, 下弦材,
垂直材(腹材)の節点番号を示し、
()内は要素番号を示している。
即ち、28節点で要素数114の立体
トラスである。

部材	部材番号	断面積(cm ²)
上弦材	(1)~(12)	100
下弦材	(13)~(24)	100
上横構水平材	(25)~(31)	30
上横構斜材	(32)~(50)	30
下横構水平材	(32)~(38)	100
下横構斜材	(41)~(62)	100
垂直材	(63)~(76)	100
斜材	(77)~(100)	100
対傾構	(101)~(114)	40

表-1 断面諸元

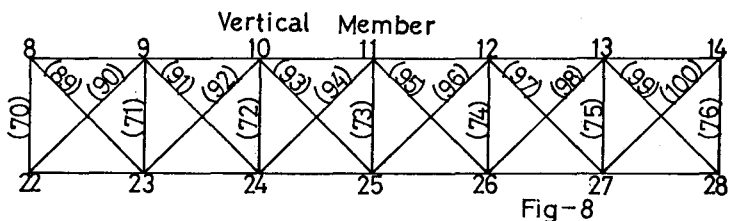


Fig-8

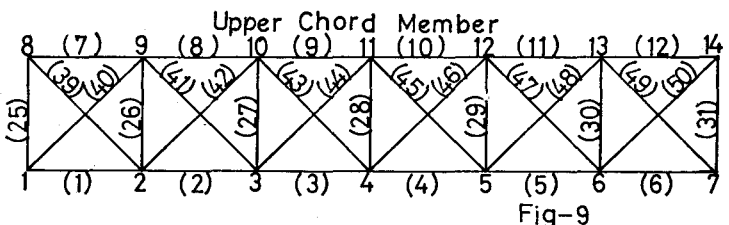


Fig-9

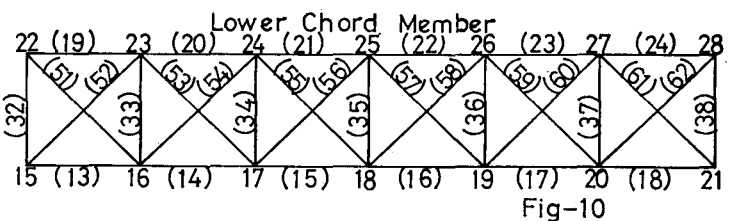


Fig-10

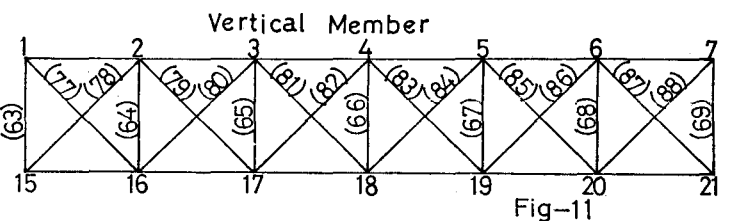


Fig-11

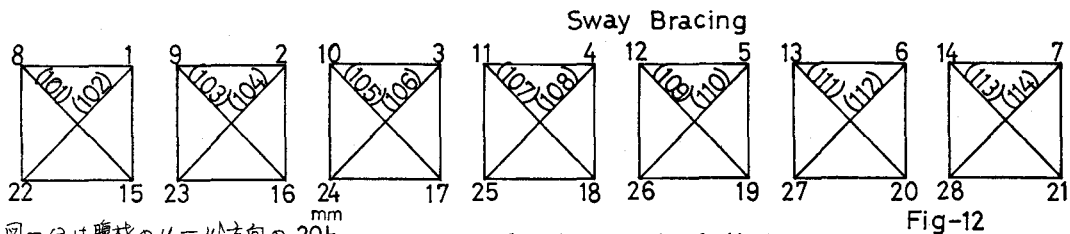


Fig-12

図-13は腹材のu-w方向の
変位である。図-14は上弦材
のu-v方向の変位である。
図-15は下弦材のu-v方向
の変位である。図-16は対傾
構のv-w方向の変位である。
図-13~16をみるに上弦材,
下弦材ともw方向(鉛直方向)
の変位が、u, v方向に比較し
て著しく大きいことがわかる。
また、上弦材におけるu方向
の変位も節点 1, 7, 8, 14

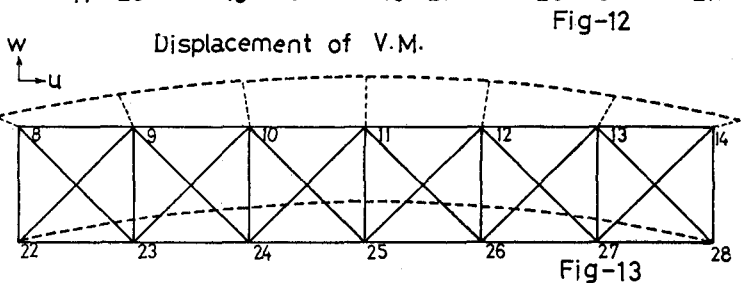


Fig-13

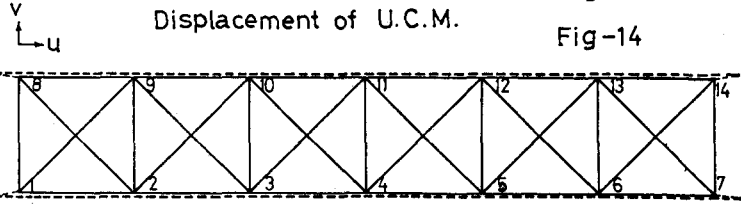


Fig-14

でかなり大きい値になる。

図-17は垂直桁の応力を示したものであり、図-18は上弦

桁の応力を示したものであり、図-19は下弦桁の応力を示したものであり、図-20は対傾

構の応力を示したものである。図-17

~20をみるに、上弦桁は $43 \sim 57 \text{ kg/cm}^2$

前後である。下弦桁は $-450 \sim -535 \text{ kg/cm}^2$

前後である。上構構水平桁は $-63 \sim$

-86 kg/cm^2 前後である。上構構斜桁は

$-5 \sim -9 \text{ kg/cm}^2$ 前後である。下構構水平

桁は $198 \sim 279 \text{ kg/cm}^2$ 前後である。

下構構斜桁は $-148 \sim$

-281 kg/cm^2 前後である。

垂直桁は $68 \sim 87 \text{ kg/cm}^2$ 前後

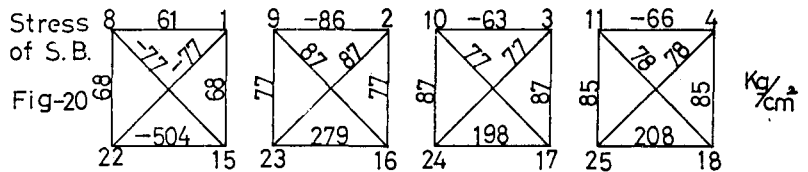
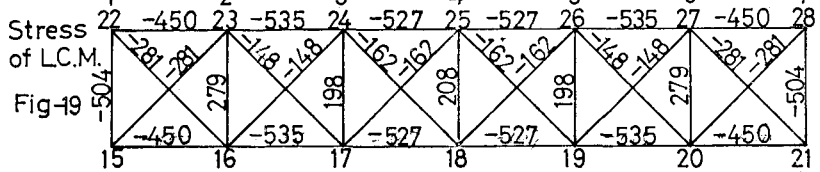
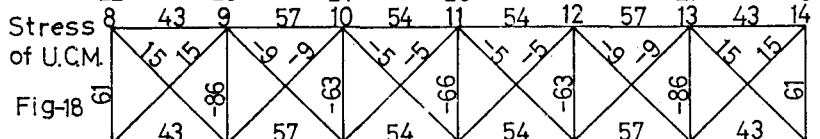
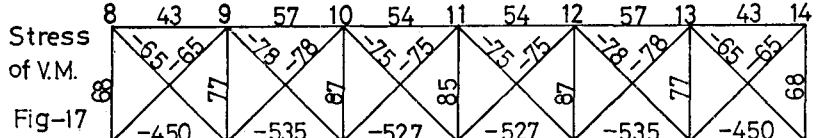
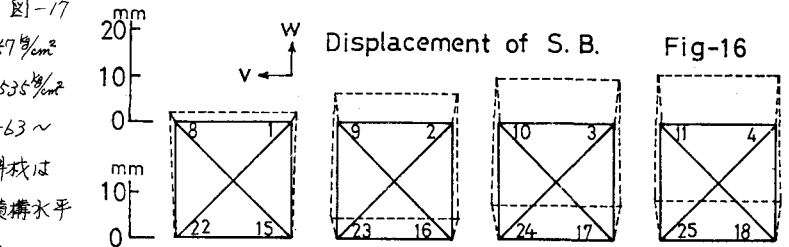
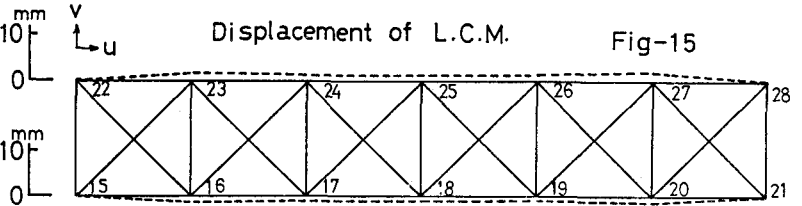
である。斜桁は $-65 \sim$

-78 kg/cm^2 前後である。対傾

構は $77 \sim 87 \text{ kg/cm}^2$ 前後であ

る。また、支束の反力は

次のようである。(ton)



互方向に大きい支束反力が生じている。

4. あとがき

本報告は立体トラス橋

の温度変化による変位、応力を剛性マトリックス法により解析したものである。支持条件、一部分の部材が温度変化を受ける場合、断面諸元などの違いによってそれぞれ異なった値を示すがそれらについては別の機会に発表いたします。他の橋梁構造物(連続桁、ラーメン、ランガー桁、ローゼ桁、フィーレンディールなど)についても温度変化および温度差(温度は梁の長さ方向には一定であるが、高さ方向には直線的に変化する場合)のある場合の解析も別の機会に譲ります。計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM230-75を使用した。

参考文献

1. 吉澤雅夫 監訳, “マトリックス法による構造力学の解法”, (1967), 培風館
2. 吉村信敏, “二次元応力解析のプログラミングについてII”, (1970), マトリックス構造解析法講座, 日本鋼構協会