

アフィン荷重とその構造力学への応用(その1)

北海道大学 正員 渡辺 昇
北海道大学 学生員 中村 信之

1. アフィン荷重について

桁の微分方程式は、桁の分布荷重を $p(x)$ 、桁のたわみを $y(x)$ とすると、 $EI y''''(x) = p(x)$ で表わすことができる。今、荷重 $p(x)$ を、境界条件を満足する桁のたわみ曲線上に相似な分布荷重に展開することを考える。この場合の相似とは、たわみは最終的に適当な固有値を有する級数に展開されるわけであるが、それぞれの固有値に対して、たわみと分布荷重が比例関係にある、ということである。このように仮定して得た荷重をアフィン荷重と呼ぶことにする。

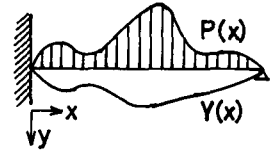


図-1

$$EI y''''(x) = p(x) = R^2 y(x) \quad \dots (1)$$

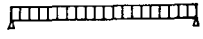
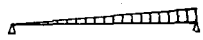
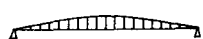
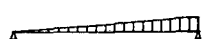
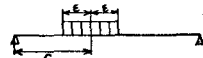
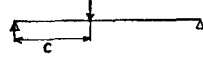
ここで R^2 は仮定した比例定数であり、更に $m = R/\sqrt{EI}$ とおき(1)式を解くとその解は次式(2)となる。

$$y(x) = A \cos mx + B \sin mx + C \cosh mx + D \sinh mx \quad \dots (2)$$

ここで係数 A, B, C, D を決定するとき、両端の境界条件により固有方程式が得られ、その固有値は桁の両端の支持条件のみにより決定される。(1)式の解はそれぞれの固有値に対して、直交関数系を形成するので、荷重 $p(x)$ の式が与えられれば、級数展開した場合の係数を決定することができる。次にその計算結果を示す。

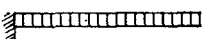
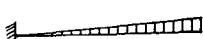
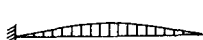
2. 各種の境界条件、荷重状態に対するアフィン荷重式

I. 両端単純支持

- | | | | | |
|----------|--|-------|--|--------------------------|
| ① 等分布荷重 | $p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (\cos \lambda_n - 1) \sin \frac{\lambda_n x}{l}$ | ----- |  | R |
| ② 三角分布荷重 | $p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n}{\lambda_n} \sin \frac{\lambda_n x}{l}$ | ----- |  | $R \frac{l}{2}$ |
| ③ 正弦分布荷重 | $p(x) = p_0 \sin \frac{\lambda_1 x}{l}$ | ----- |  | $R \sin \frac{\pi^2}{4}$ |
| ④ 余弦分布荷重 | $p(x) = 8p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \cos \lambda_n}{\pi^2 - 4\lambda_n^2} \sin \frac{\lambda_n x}{l}$ | ----- |  | $R \sin \frac{\pi^2}{2}$ |
| ⑤ 部分分布荷重 | $p(x) = 4p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\sin \lambda_n c}{l} \sin \frac{\lambda_n}{l} \sin \frac{\lambda_n x}{l}$ | ----- |  | R |
| ⑥ 集中荷重 | $p(x) = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n c}{l} \sin \frac{\lambda_n}{l} \sin \frac{\lambda_n x}{l}$ | ----- |  | P |

ここで λ_n は n 番目の固有値である。以下他の場合も同じである。

II. 一端固定他端自由支持

- | | | | | |
|---|---|-------|--|--------------------------|
| ① | $p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n} X_n(x)$ | ----- |  | R |
| ② | $p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} X_n(x)$ | ----- |  | $R \frac{l}{2}$ |
| ③ | $p(x) = -2\pi p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4 - \pi^4} (\lambda_n^2 - \pi^2) \frac{\sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n} X_n(x)$ | ----- |  | $R \sin \frac{\pi^2}{4}$ |

$$④ \quad p(x) = -8\pi p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{16\lambda_n^4 - \pi^4} \left(2\lambda_n - \frac{\pi \sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Cantilever beam with distributed load } R \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$⑤ \quad p(x) = 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Cantilever beam with rectangular load of width } c \text{ and height } R$$

$$⑥ \quad p(x) = \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Cantilever beam with point load } P \text{ at distance } c$$

$$= z^* \quad X_n(x) = \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} x + \cosh \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} x + \sinh \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\}, \quad \delta_n = \frac{\cos \lambda_n + \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n + \sinh \lambda_n}$$

III. 一端固定他端單純支持

$$① \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\delta_n + \frac{\sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with distributed load } R$$

$$② \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda_n \sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with triangular load } R \frac{x}{L}$$

$$③ \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^4 - \pi^4} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with parabolic load } R \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$④ \quad p(x) = -8\pi p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{16\lambda_n^4 - \pi^4} \left\{ 2\pi \lambda_n - \frac{\pi^2 (-\cos \lambda_n \cosh \lambda_n) - 4\lambda_n^2 \sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with distributed load } R \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$⑤ \quad p(x) = 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with rectangular load of width } c \text{ and height } R$$

$$⑥ \quad p(x) = \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with point load } P \text{ at distance } c$$

$$= z^* \quad X_n(x) = \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} x - \cosh \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} x - \sinh \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\}, \quad \delta_n = \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n}$$

IV. 兩端固定支持

$$① \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\delta_n + \frac{\sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with distributed load } R$$

$$② \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda_n \sin \lambda_n \sinh \lambda_n + \cos \lambda_n \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with triangular load } R \frac{x}{L}$$

$$③ \quad p(x) = -2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^4 - \pi^4} \left(1 + \frac{\sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with parabolic load } R \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$④ \quad p(x) = -16p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{16\lambda_n^4 - \pi^4} \left(\pi + \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n \sinh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \right) X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with distributed load } R \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$⑤ \quad p(x) = 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c \sin \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \sinh \frac{\lambda_n}{L} \varepsilon \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with rectangular load of width } c \text{ and height } R$$

$$⑥ \quad p(x) = \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} c - \cosh \frac{\lambda_n}{L} c \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} c - \sinh \frac{\lambda_n}{L} c \right) \right\} X_n(x) \quad \text{---} \quad \text{Diagram: Beam with point load } P \text{ at distance } c$$

$$= z^* \quad X_n(x) = \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n}{L} x - \cosh \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \delta_n \left(\sin \frac{\lambda_n}{L} x - \sinh \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\}, \quad \delta_n = \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n}$$

3. たわみ及び曲げモーメントの計算

以上のように、各境界条件また種々の荷重状態に対する式が求まったので、それらを使用し実際にたわみ、曲げモーメントを計算した。たわみ式は、(1)式にアフィン荷重を代入し係数を比較することにより決定することができる。例として両端固定、等分布荷重の場合のたわみ式を示す。

$$y(x) = -\frac{2l^4 p_0}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^4 + \frac{\sinh \lambda_n \sinh \lambda_l}{\sin \lambda_n \sinh \lambda_l})} X_n(x) \quad \text{---- (3)}$$

ここで λ_n , $X_n(x)$ は両端固定板の場合のものである。図-2 は両端固定板の各種荷重状態に対するたわみ図である。収束状態は非常に良く、 $n=25$ でほぼ十分な結果が得られた。次にたわみを微分して曲げモーメントを計算したものが図-3 である。級数解では一般に断面力はたわみに比して収束が悪くなるのであるが、この場合 $n=40$ でほぼ十分な解を得ることができた。例えば両端固定板の中央に集中荷重が載荷している場合、その点での曲げモーメントは正解の約 97% であった。

4. 剛性マトリックスとの組み合わせによるねり剛性を無視した場合の直交異方性板の解析 ($\mu_x = \mu_y = 0$)

図-4 のような板に集中荷重 P が載荷している場合、荷重点でパネルを分割し、 X 方向には境界条件を満足するアフィン荷重を使用し、 Y 方向には剛性マトリックス法を使用して解析する。板の微分方程式は

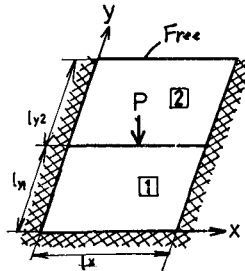


図-4

$$B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p(x, y) \quad \text{---- (4)}$$

であるが剛性マトリックス法では l_2 の区間に荷重が無いので

$$B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{---- (5)} \quad \text{となる。}$$

いま $x = -$ 一定の相対する二辺が固定の場合 $w(x, y)$ を次式のように仮定して変数分離法で解く。

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot v_n(y) \quad \text{---- (6)}$$

ここで $X_n(x)$ は前出のものである。(6) を (5) に代入して解くと

$$v_n(y) = C_1 \sinh \alpha y \sin \alpha x + C_2 \sinh \alpha y \cos \alpha x + C_3 \cosh \alpha y \sin \alpha x + C_4 \cosh \alpha y \cos \alpha x \quad \text{---- (7)}$$

係数 C_1, C_2, C_3, C_4 は

$$\theta = \theta_y = \partial w / \partial y, \quad M = M_y = -B_y \partial^2 w / \partial y^2, \quad R = R_y = -B_y \partial^3 w / \partial y^3 \quad \text{---- (8)}$$

より $y=0, y=l_y$ の断面値 $\theta_0, w_0, M_0, R_0, \theta_l, w_l, M_l, R_l$ の値を使用し決定される。マトリックス表示すると次式 (9) の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ R_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ \theta_l \\ R_l \\ M_l \end{bmatrix} \quad \text{---- (9)}$$

これから変位と断面力を分離 (剛性マトリックスを導く) 次式 (10) となる。図-5 は断面値の符号である。

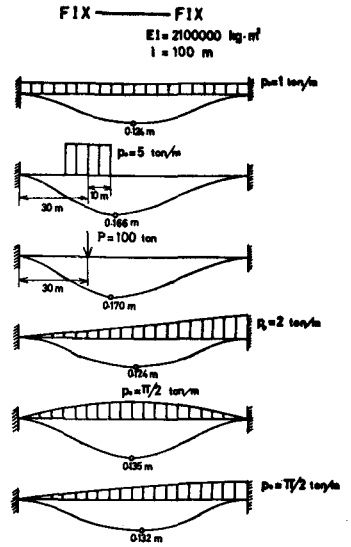


図-2
曲げモーメント図
 $l=100 \text{ m}$

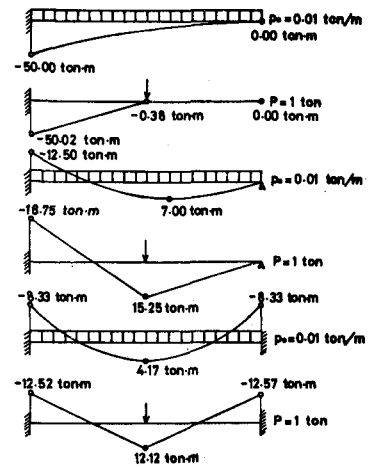
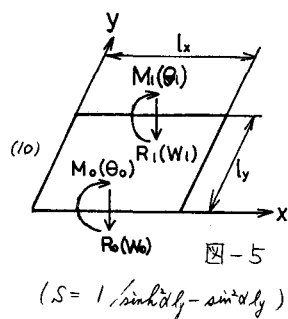


図-3

R_o	$S[4By^3(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \sinh \alpha y \cosh^3 \alpha y)]$	$S[2By^2(\sinh^2 \alpha y + \sinh^2 \alpha y)]$	$-S[4By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \cosh^2 \alpha y \sinh \alpha y)]$	$S[4By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \sinh^2 \alpha y)]$
M_o		$S[2By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y - \sinh \alpha y \cosh^3 \alpha y)]$	$-S[4By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \cosh^2 \alpha y \sinh \alpha y)]$	$-S[2By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y - \sinh^2 \alpha y)]$
R_e			$S[4By^3(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \sinh \alpha y \cosh^3 \alpha y)]$	$-S[2By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y + \sinh^2 \alpha y)]$
M_e				$S[2By^2(\sinh^2 \alpha y \cosh \alpha y - \sinh^2 \alpha y)]$
	Symmetric			



5. 実際の計算例

すべてY方向は一端固定他端自由支持、図-6, 7はX方向一端固定他端自由、図-8, 9は一端固定他端単
 純、図-10, 11は両端固定。幅=6.6m, 長さ=12m, $BX = 1.028 \times 10^8 \text{ ton} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$, $BY = 6.6745 \times 10^8 \text{ ton} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$ である。

