土木学会北海道支部　論文報告集　昭和50年度

円孔を有する無限厚板の軸対称応力解析について　（訂正論文）

北見工業大学　正員　奥村　勇

1. まえがき

前年度の土木学会北海道支部論文報告集（pp. 261～264）に発表した著者の同一題名の論文に一部誤りがあったので，その訂正論文を今回報告する。

前年度の論文で誤りのある箇所は，$z=\pm h$ における σ_z を Bessel 展開する際に，正しくは，初期項が生ずるのであるが，うかつにも，それを落している部分である。この訂正論文では，それを訂正し，簡単な応力関数を付加することにより，その初期項を処理することを試みた。

2. 基本解と応力関数

前年度の論文の式（7）に示されている応力関数 Φ_3 に応力関数 $G_0 z$ を付加して次のように表わす。

$$\Phi_3 = -\sum_{s=1}^{\infty}\left(G_s J_0(\alpha_s r) + D_s Y_0(\alpha_s r)\right)\sinh \alpha_s z + \underline{G_0 z}$$

3. 変位と応力の表現式

Φ_3 に $G_0 z$ を付加したために，式（7）から導出される変位および応力がおのおの異なってくる。前年度の論文の式（10）の右辺に $2(1-2\nu)G_0 z$ を，式（13）および式（14）の右辺に $2\nu G_0$ を，式（15）の右辺に $2(1-\nu)G_0$ をそれぞれ加える。

4. 境界条件と未知定数の関係式

前年度の論文の式（29・a）の右辺に $2\nu G_0$，式（30・a）の右辺に $2(1-\nu)G_0$ をそれぞれ加える。式（30・a）および式（30・b）を改めて示すと次のようである。

$$\sigma_z^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty}(-\alpha_s)G_s C_0(\alpha_s r)\left\{(1+\alpha_s h\coth\alpha_s h)\cosh\alpha_s z - \alpha_s z\sinh\alpha_s z\right\} + \underline{2(1-\nu)G_0} \cdots\cdots (30\cdot a)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cos\beta_n z\, F_n\left\{\left(2+\beta_n a\frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}\right)K_0(\beta_n r) - \beta_n r K_1(\beta_n r)\right\} \cdots\cdots (30\cdot b)$$

式（30・a）より

$$(\sigma_z^{(1)})_{z=\pm h} = \sum_{s=1}^{\infty}(-\alpha_s)G_s C_0(\alpha_s r)\left(\cosh\alpha_s h + \frac{\alpha_s h}{\sinh\alpha_s h}\right) + \underline{2(1-\nu)G_0} \cdots\cdots (a)$$

式（30・b）より

$$(\sigma_z^{(2)})_{z=\pm h} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(-1)^n F_n\left\{\left(2+\beta_n a\frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}\right)K_0(\beta_n r) - \beta_n r K_1(\beta_n r)\right\} \cdots\cdots (b)$$

境界条件　$(\sigma_z)_{z=\pm h}=0$　を満たすためには，式（b）を Bessel の級数に展開することが必要となる。式（b）の｛　｝の中を $f(r)$ と置いて　$a<r<b$　$(b\gg a)$ の範囲で

$$f(r) = \left(2+\beta_n a\frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}\right)K_0(\beta_n r) - \beta_n r K_1(\beta_n r) = \underline{c_0} + \sum_{s=1}^{\infty}c_s C_0(\alpha_s r) \cdots\cdots (c)$$

と展開すると，係数 c_0 および c_s は次のように求められる。

$$c_0 = \frac{2eK_1(\beta_n b)}{e^2-1}\left(\frac{eK_0(\beta_n b)}{K_1(\beta_n b)} - \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}\right) \cdots\cdots (d)$$

$$C_s = \frac{2}{b^2 C_0^2(\alpha_s b) - a^2 C_0^2(\lambda_s)} \cdot \frac{\beta_n}{\alpha_s^2 + \beta_n^2} \Big\{ b^2 \beta_n C_0(\alpha_s b) K_0(\beta_n b) - b\, C_0(\alpha_s b) K_1(\beta_n b) \times$$

$$\times \Big(\beta_n a \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)} + \frac{2\alpha_s^2}{\alpha_s^2 + \beta_n^2} \Big) + \frac{2\alpha_s^2 a}{\alpha_s^2 + \beta_n^2} C_0(\lambda_s) K_1(\beta_n a) \Big\} \cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

式（c）に示すように初期項（この場合には定数項）C_0が現われる。

境界条件

$$(\sigma_z)_{z=\pm h} = (\sigma_z^{(1)})_{z=\pm h} + (\sigma_z^{(2)})_{z=\pm h} = 0$$

より，式（a），（b）および式（c）を用いて，

$$G_s(-\alpha_s)\Big(\cosh \alpha_s h + \frac{\alpha_s h}{\sinh \alpha_s h}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (-1)^n C_s F_n = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (f)$$

$$2(1-\nu) G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (-1)^n C_0 F_n = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (g)$$

が得られる。式（f）を無次元化して表わすと，前年度の論文の式（34）となる。式（g）から

$$\frac{G_0}{q_0} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f n\pi C_0 F_n' \cdots\cdots\cdots\cdots (h)$$

と求められる。

変位および応力にG_0の項を付加したために，$r \longrightarrow \infty$で変位と応力が消失しないように一見思われるが，式（d）に示されているように，$b \longrightarrow \infty$とすると$C_0 \longrightarrow 0$となり，式（h）から$G_0 \longrightarrow 0$となるので，無限遠における変位と応力は消失することになる。この問題の解法においては，bを有限に取っているが，bをaに比較して十分に大きく取ると，G_0の変位および応力におよぼす影響は小さくなる。ちなみに，$b/a = 20.0$として計算した場合には，G_0の大きさは10^{-8}のオーダーであり，数値計算上，変位および応力におよぼす影響はほとんど無くなるようである。

前年度の論文の式（33′）は境界条件　$(\sigma_r)_{r=a} = -p(z)$　より，G_0の項を考慮して，次のように訂正される。

$$E_0' = -2\nu \frac{G_0}{q_0} - \frac{d}{h} \cdots\cdots\cdots\cdots (33')$$

5．数値計算例

前年度の論文では，$b/a = 5.0$　としたが，今回，$b/a = 20.0$　として計算を行ったところ，$z = \pm h$におけるσ_zの収束がやや良くなった程度で，厚板内部の応力にはほとんど変化が見られなかった。したがって，前年度の論文の数値計算例の図－2～図－5は有効である。

6．むすび

前述したように，$b \longrightarrow \infty$とすると，$z = \pm h$におけるσ_zの Bessel 展開における初期項C_0は0となり，したがってG_0も0となるので，初期項も付加解も不要となるように一見思われるが，この解法においては，$b \gg a$ではあるが，bを有限に取っているので，式を組み立てる上では，$(\sigma_z)_{z=\pm h}$　の Bessel 展開には初期項をだすのが正しいようである。bをaに比較して十分に大きく取れば，数値計算上では，変位および応力におよぼす初期項の有無の影響はほとんど無いようである。

以上，訂正論文を報告して，陳謝の意を表します。