部分的せん断荷重を受ける矩形厚板の２次元応力問題について

北見工業大学　正員　奥村　勇
同　　同　○三宅　和子

1. まえがき

矩形板の２次元応力問題に関する研究は、古くより数多く見受けられ、また、弾性学の書物においても詳しく述べられており、その基礎理論はすでに完成されているように思われる。

しかしながら、特殊な荷重条件あるいは複雑な境界条件を持った矩形板の応力問題となると、その解法および数値計算がなかなか困難となる。小林[1),2)]らは、片持はり類似の矩形厚板の上側面に部分的等分布荷重が作用する場合の２次元応力問題および３次元応力問題を取り扱っている。

本研究は、一端が完全に固定され、先端に部分分布の一様せん断荷重を受ける矩形厚板を平面ひずみ状態とみなし、Fourier 級数解法により応力および変位の解析を行うものである。先端の全面にせん断荷重が放物線分布し、固定端で反りが生ずるような場合には、片持はりの曲げの問題として数多くの書物で述べられているところであるが[3)]、本研究で取り扱う種類の応力問題はあまり見うけられないようである。

本研究では、矩形厚板を平面ひずみ状態と考え２次元応力問題として解析しているが、この問題の３次元応力的取り扱いは著者らの一人によって、すでに報告されている[4)]。

2、応力関数および変位関数

応力関数 χ および変位関数 ψ を用いると、応力および変位は次のように表わされる。

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\ ,\quad \sigma_z=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\ ,\quad \sigma_y=\nu(\sigma_x+\sigma_z)\ ,\quad \tau_{xz}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}\quad \text{------}(1)$$

ここで、$\nabla^4\chi=0\ ,\quad \nabla^4\equiv\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\quad \text{---}(2)$

$$2Gu=-\frac{\partial\chi}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}\quad \text{------}(3)$$

$$2Gw=-\frac{\partial\chi}{\partial z}+(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad \text{------}(4)$$

ここで、

$$\nabla^2\psi=0\ ,\quad \nabla^2\chi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\ ,\quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad \text{---}(5)$$

式(3)および式(4)の G および ν は、それぞれせん断弾性係数および Poisson 比を表わすものとする。

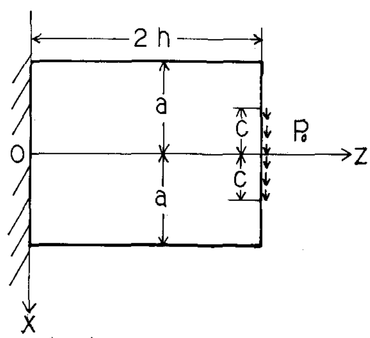


図-1　矩形板の座標系

図-１に示したように座標軸を取り、矩形板の応力状態が $x=0$ に関して逆対称となることを考慮して、式(2)および式(5)から応力関数 χ および変位関数 ψ を求めると次のようになる。

$$\chi=\sum_{n=1}^{\infty}\cos k_nz\,(\overline{A}_n^{(1)}\sinh k_nx+\overline{A}_n^{(2)}x\cosh k_nx)+\sum_{i=1}^{\infty}\sin\alpha_ix\,(\overline{C}_i^{(1)}\cosh\alpha_iz+\overline{C}_i^{(1)}\sinh\alpha_iz$$
$$+\overline{C}_i^{(2)}z\sinh\alpha_iz+\overline{C}_i^{(2)}z\cosh\alpha_iz)\quad \text{------}(6)$$

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}\overline{A}_n^{(2)}\sin k_nz\cosh k_nx-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\alpha_i}\cos\alpha_ix\,(\overline{C}_i^{(2)}\sinh\alpha_iz+\overline{C}_i^{(2)}\cosh\alpha_iz)\quad \text{----}(7)$$

ここで、$\alpha_i=\frac{i\pi}{2a}\ (i=1,3,5,\cdots\cdots)\ ,\quad k_n=\frac{n\pi}{2h}\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

とする。また、$\overline{A}_n^{(1)},\cdots\cdots,\overline{C}_i^{(2)}$ などは境界条件によって求められる未知定数である。

3. 付加的応力関数

$x=\pm a$ における境界条件を満たすために σ_x を Fourier 級数に展開することが必要となるが、その際に $n=0$

の項が生ずるのでそれを処理するために次の付加的応力関数が必要となる。

$$\chi_0=\frac{C_0}{2a^3}\{15a^2(-4hz+z^2)x-(20h^2-20hz+5z^2+2a^2)x^3+x^5\}\cdots\cdots(8)$$

ここで、C_0は境界条件によって求められる未知定数である。

4. 応力および変位の式

直応力とせん断応力は、式(1)および式(6)から次のように求められる。

$$\sigma_x=-\sum_{n=1}^{\infty}k_n^2\cos k_nz\,(\bar{A}_n^{(1)}\sinh k_nx+\bar{A}_n^{(2)}x\cosh k_nx)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sin\alpha_ix\{(C_i^{(1)}\alpha_i+2C_i^{(2)}+\bar{C}_i^{(2)}\alpha_iz)\times\cosh\alpha_iz+(\bar{C}_i^{(1)}\alpha_i+C_i^{(2)}\alpha_iz+2\bar{C}_i^{(2)})\sinh\alpha_iz\}\cdots\cdots(9)$$

$$\sigma_z=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\cos k_nz\{(\bar{A}_n^{(1)}k_n+2\bar{A}_n^{(2)})\sinh k_nx+\bar{A}_n^{(2)}k_nx\cosh k_nx\}-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\sin\alpha_ix\{(C_i^{(1)}+\bar{C}_i^{(2)}z)\times\cosh\alpha_iz+(\bar{C}_i^{(1)}+C_i^{(2)}z)\sinh\alpha_iz\}\cdots\cdots(10)$$

$$\tau_{xz}=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\sin k_nz\{(\bar{A}_n^{(1)}k_n+\bar{A}_n^{(2)})\cosh k_nx+\bar{A}_n^{(2)}k_nx\sinh k_nx\}-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cos\alpha_ix\{(\bar{C}_i^{(1)}\alpha_i+C_i^{(2)}\alpha_iz+\bar{C}_i^{(2)})\cosh\alpha_iz+(C_i^{(1)}\alpha_i+C_i^{(2)}+\bar{C}_i^{(2)}\alpha_iz)\sinh\alpha_iz\}\cdots\cdots(11)$$

また、変位は、式(3)，(4)，(6)および式(7)から次のように求められる。

$$2Gu=-\sum_{n=1}^{\infty}\cos k_nz[\{\bar{A}_n^{(1)}k_n-(1-2\nu)\bar{A}_n^{(2)}\}\cosh k_nx+\bar{A}_n^{(2)}k_nx\sinh k_nx]-\sum_{i=1}^{\infty}\cos\alpha_ix[\{C_i^{(1)}\alpha_i+\bar{C}_i^{(2)}\alpha_iz+2(1-\nu)C_i^{(2)}\}\cosh\alpha_iz+\{\bar{C}_i^{(1)}\alpha_i+C_i^{(2)}\alpha_iz+2(1-\nu)\bar{C}_i^{(2)}\}\sinh\alpha_iz]\cdots\cdots(12)$$

$$2Gw=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_nz[\{\bar{A}_n^{(1)}k_n+2(1-\nu)\bar{A}_n^{(2)}\}\sinh k_nx+\bar{A}_n^{(2)}k_nx\cosh k_nx]-\sum_{i=1}^{\infty}\sin\alpha_ix[\{\bar{C}_i^{(1)}\alpha_i+C_i^{(2)}\alpha_iz-(1-2\nu)\bar{C}_i^{(2)}\}\cosh\alpha_iz+\{C_i^{(1)}\alpha_i+\bar{C}_i^{(2)}\alpha_iz-(1-2\nu)C_i^{(2)}\}\sinh\alpha_iz]\cdots\cdots(13)$$

さらに式(8)の付加的応力関数より導出される応力および変位は次のようである。

$$\sigma_{x,0}=\frac{C_0}{2a^3}(3a^2-x^2)x\cdots\cdots(14)$$

$$\sigma_{z,0}=\frac{C_0}{2a^3}\{-3(20h^2-20hz+5z^2+2a^2)x+10x^3\}\cdots\cdots(15)$$

$$\tau_{xz,0}=\frac{3C_0}{2a^3}(x^2-a^2)(z-2h)\cdots\cdots(16)$$

$$2Gu_{,0}=\frac{C_0}{40a^3}\{-5(x^4-z^4)-5\nu(x^4+z^4)+6(x^2-z^2)(5a^2+20h^2\nu-3a^2\nu)+40h(3h-z)z^2-40h\nu(3x^2-z^2)z+6(5\nu x^2-3a^2)z^2+240a^2hz\}\cdots\cdots(17)$$

$$2Gw_{,0}=\frac{C_0}{10a^3}[\{-5(1-\nu)(12h^2-6hz+z^2)-3a^2(2+3\nu)+5(2-\nu)x^2\}xz-10(2-\nu)hx^3]\cdots(18)$$

5. 境界条件

$$x=\pm a\ \text{において}\quad \sigma_x=0\ ,\ \tau_{xz}=0\cdots\cdots(19\cdot a,b)$$

$$z=0\ \text{において}\quad u=0\ ,\ w=0\cdots\cdots(20\cdot a,b)$$

$$z=2h\ \text{において}\quad \sigma_z=0\ ,\ \tau_{xz}=P(x)\cdots\cdots(21\cdot a,b)$$

ここで、式(21·b)の$P(x)$は、図−1に示した部分的せん断荷重をFourier級数に展開したものであり、次のようである。

$$P(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4P_0}{i\pi}\sin\alpha_ic\cos\alpha_ix\cdots\cdots(22)$$

境界条件(19·b)より、次の関係が得られる。

$$\bar{A}_n^{(1)}=-\frac{\bar{A}_n^{(2)}}{k_n}(1+k_na\tanh k_na)\cdots\cdots(23)$$

境界条件(20·b)を満たすために式(18)で$z=0$と置きxを含む項をFourier級数に展開した式と式(13)から次の関係が得られる。

$$\bar{C}_i^{(1)}=(1-2\nu)C_i^{(2)}/\alpha_i-C_0M\cdots\cdots(24)$$

ここで、
$$M=\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{a^4\alpha_i^5}6h(2-\nu)(a^2\alpha_i^2-2)\cdots\cdots(24')$$

境界条件(21·b)より、式(24)を用いて次の関係を得る。

$$C_i^{(1)}=-\frac{C_i^{(2)}}{\alpha_i}(1+2\alpha_ih\coth 2\alpha_ih)-\frac{\bar{C}_i^{(2)}}{\alpha_i}\{2(1-\nu)\coth 2\alpha_ih+2\alpha_ih\}+C_0M\coth 2\alpha_ih-K\cdots\cdots(25)$$

ここで、 $$K=\frac{4P_0}{i\pi}\frac{\sin\alpha_i c}{\alpha_i^2\sinh 2\alpha_i h}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25')$$

したがって、式(23),(24)および式(25)の関係により、応力および変位の式から未知定数$\bar{A}_n^{(1)}$, $C_i^{(1)}$および$\bar{C}_i^{(1)}$を消去することができる。例として、応力について示せば次のようである。

$$\begin{aligned}\sigma_x=&\sum_{n=1}^{\infty}k_n\bar{A}_n^{(2)}\cos k_n z\{(1+k_n a\tanh k_n a)\sinh k_n x-k_n x\cosh k_n x\}+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sin\alpha_i x\\&\times[C_i^{(2)}\{(1-2\alpha_i h\coth 2\alpha_i h)\cosh\alpha_i z+\alpha_i z\sinh\alpha_i z\}+\bar{C}_i^{(2)}\{(\alpha_i z-2\alpha_i h-2(1-\nu)\coth 2\alpha_i h)\\&\times\cosh\alpha_i z+(3-2\nu)\sinh\alpha_i z\}+C_0M\alpha_i(\coth 2\alpha_i h\cosh\alpha_i z-\sinh\alpha_i z)-K\alpha_i\\&\times\cosh\alpha_i z]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z=&\sum_{n=1}^{\infty}k_n\bar{A}_n^{(2)}\cos k_n z\{(1-k_n a\tanh k_n a)\sinh k_n x+k_n x\cosh k_n x\}+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sin\alpha_i x\\&\times[C_i^{(2)}\{(1+2\alpha_i h\coth 2\alpha_i h)\cosh\alpha_i z-\alpha_i z\sinh\alpha_i z\}+\bar{C}_i^{(2)}\alpha_i\{(2\alpha_i h-\alpha_i z+2(1-\nu)\coth 2\alpha_i h)\\&\times\cosh\alpha_i z-(1-2\nu)\sinh\alpha_i z\}-C_0M\alpha_i(\coth 2\alpha_i h\cosh\alpha_i z-\sinh\alpha_i z)+K\alpha_i\\&\times\cosh\alpha_i z]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}=&\sum_{n=1}^{\infty}k_n\bar{A}_n^{(2)}\sin k_n z(-k_n a\tanh k_n a\cosh k_n x+k_n x\sinh k_n x)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cos\alpha_i x[C_i^{(2)}(2\alpha_i h\\&\times\coth 2\alpha_i h\sinh\alpha_i z-\alpha_i z\cosh\alpha_i z)+\bar{C}_i^{(2)}\{(2\alpha_i h-\alpha_i z+2(1+\nu)\coth 2\alpha_i h)\\&\times\sinh\alpha_i z-2(1-\nu)\cosh\alpha_i z\}-C_0M\alpha_i(\coth 2\alpha_i h\sinh\alpha_i z-\cosh\alpha_i z)+K\alpha_i\sinh\alpha_i z]\cdots(28)\end{aligned}$$

6. 4群の連立1次方程式

残りの境界条件(19·a),(20·a)および(21·a)を満たすためには、応力および変位をおのおのFourier級数に展開することが必要となる。例として、境界条件(19·a)について示すことにする。$x=a$におけるσ_xは

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_{x=a}=&\sum_{n=1}^{\infty}k_n\bar{A}_n^{(2)}\cos k_n z\{(1+k_n a\tanh k_n a)\sinh k_n a-k_n a\cosh k_n a\}+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{i-1}{2}}\alpha_i[C_i^{(2)}\\&\times\{(1-2\alpha_i h\coth 2\alpha_i h)\cosh\alpha_i z+\alpha_i z\sinh\alpha_i z\}+\bar{C}_i^{(2)}\{(\alpha_i z-2\alpha_i h-2(1-\nu)\coth 2\alpha_i h)\\&\times\cosh\alpha_i z+(3-2\nu)\sinh\alpha_i z\}+C_0M\alpha_i(\coth 2\alpha_i h\cosh\alpha_i z-\sinh\alpha_i z)-K\alpha_i\\&\times\cosh\alpha_i z]\quad\cdots\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

となるので、式(29)のiについての総和記号を含む項の[ ]の中を$f(z)$と置き、Fourier級数に展開すると

$$\begin{aligned}f(z)=&-\frac{1}{2h}\{\bar{C}_i^{(2)}2(1-\nu)-C_0\alpha_iM+\alpha_iK\sinh 2\alpha_i h\}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{h(k_n^2+\alpha_i^2)^2}\cos k_n z[C_i^{(2)}(-1)^n2k_n^2\\&\times\alpha_i^2\sinh 2\alpha_i h+\bar{C}_i^{(2)}2\alpha_i^2\{(-1)^nk_n^2\cosh 2\alpha_i h-k_n^2(2-\nu)-\alpha_i^2(1-\nu)\}+C_0M\alpha_i^3\\&\times(k_n^2+\alpha_i^2)-(-1)^nK\alpha_i^3(k_n^2+\alpha_i^2)\sinh 2\alpha_i h]\quad\cdots\cdots\cdots(30)\end{aligned}$$

となるので、式(29)は次のように書きなおされる。

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_{x=a}=&\sum_{n=1}^{\infty}k_n\bar{A}_n^{(2)}\cos k_n z(\sinh k_n a-k_n a/\cosh k_n a)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{h(k_n^2+\alpha_i^2)^2}\cos k_n z[C_i^{(2)}\\&\times(-1)^n2k_n^2\alpha_i^2\sinh 2\alpha_i h+\bar{C}_i^{(2)}2\alpha_i^2\{(-1)^nk_n^2\cosh 2\alpha_i h-k_n^2(2-\nu)-\alpha_i^2(1-\nu)\}\\&+C_0M\alpha_i^3(k_n^2+\alpha_i^2)-(-1)^nK\alpha_i^3(k_n^2+\alpha_i^2)\sinh 2\alpha_i h]-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{2h}\{\bar{C}_i^{(2)}2(1-\nu)-C_0\alpha_iM\\&+\alpha_iK\sinh 2\alpha_i h\}\quad\cdots\cdots\cdots(29')\end{aligned}$$

したがって、境界条件(19·a)を満たすためには、式(14)および式(29')より、次の二つの関係が成立しなければならない。

$$C_0\{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{2h}\alpha_iM\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{2h}\{\bar{C}_i^{(2)}2(1-\nu)+K\alpha_i\sinh 2\alpha_i h\}\quad\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\bar{I}_n^{(1)}\bar{A}_n^{(2)}+\sum_{i=1}^{\infty}({}_nJ_i^{(1)}C_i^{(2)}+{}_n\bar{J}_i^{(1)}\bar{C}_i^{(2)}+{}_nK_i^{(1)}C_0-{}_nL_i^{(1)})=0\quad\cdots\cdots\cdots(32)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}&\bar{I}_n^{(1)}=k_n(\sinh k_n a-k_n a/\cosh k_n a)\\&{}_nJ_i^{(1)}=\frac{(-1)^{\frac{2n+i-1}{2}}}{h(k_n^2+\alpha_i^2)^2}2k_n^2\alpha_i^2\sinh 2\alpha_i h\\&{}_n\bar{J}_i^{(1)}=\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{h(k_n^2+\alpha_i^2)^2}2\alpha_i^2\{(-1)^nk_n^2\cosh 2\alpha_i h-k_n^2(2-\nu)-\alpha_i^2(1-\nu)\}\end{aligned}\right\}\cdots(32')$$

$$ {}_nK_i^{(1)} = \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{h(k_n^2+\alpha_i^2)}\alpha_i^3 M $$
$$ {}_nL_i^{(1)} = \frac{(-1)^{\frac{2n+i-1}{2}}}{h(k_n^2+\alpha_i^2)}\alpha_i^3 K\cdot\sinh 2\alpha_i h $$

境界条件(20·a)より、次式が得られる。

$$ \sum_{n=1}^{\infty} {}_i\bar{I}_n^{(2)} \bar{A}_n^{(2)} + J_i^{(2)}C_i^{(2)} + \bar{J}_i^{(2)}\bar{C}_i^{(2)} - K_i^{(2)}C_0 + L_i^{(2)} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (33) $$

ここで、

$$ {}_i\bar{I}_n^{(2)} = \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{a(k_n^2+\alpha_i^2)^2}\, 4\alpha_i \cosh k_n a\{k_n^2(2-\nu)+\alpha_i^2(1-\nu)\} $$
$$ J_i^{(2)} = 2\alpha_i h\coth 2\alpha_i h - (1-2\nu) $$
$$ \bar{J}_i^{(2)} = 2(1-\nu)\coth 2\alpha_i h + 2\alpha_i h $$
$$ K_i^{(2)} = \frac{1}{20a^4\alpha_i^5}(-1)^{\frac{i-1}{2}}[5(1+\nu)(a^4\alpha_i^4-12a^2\alpha_i^2+24)+6(a^2\alpha_i^2-2) \times\{20\alpha_i h(2-\nu)\coth 2\alpha_i h - \alpha_i^2(5a^2+20h^2\nu-3a^2\nu)\}],\quad L_i^{(2)} = K\cdot\alpha_i \quad \cdots (33') $$

境界条件(21·a)より、

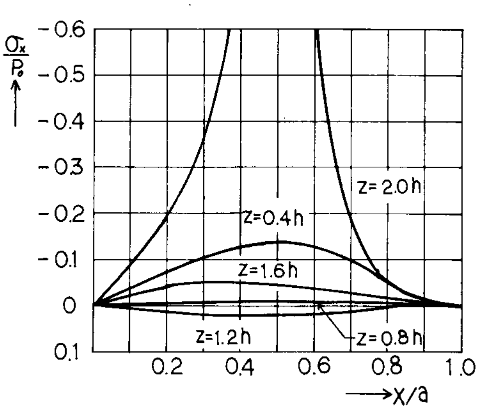
$$ \sum_{n=1}^{\infty} {}_iI_n^{(3)}\bar{A}_n^{(2)} + J_i^{(3)}C_i^{(2)} + \bar{J}_i^{(3)}\bar{C}_i^{(2)} - K_i^{(3)}C_0 + L_i^{(3)} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (34) $$

ここで、

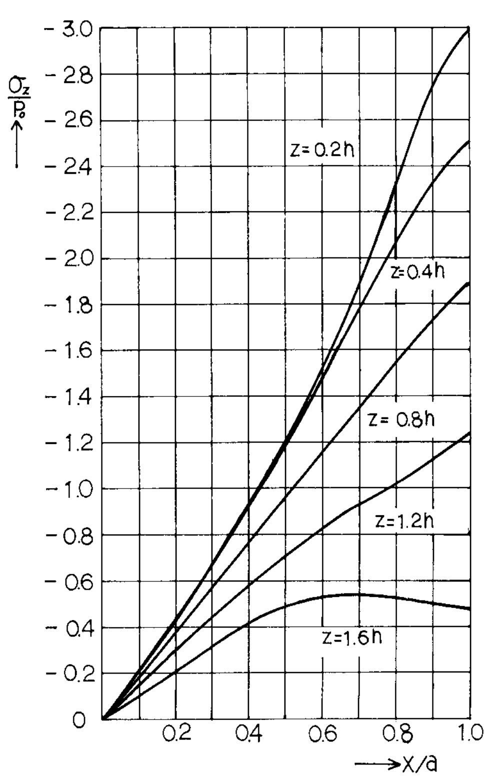
$$ {}_n\bar{I}_i^{(3)} = \frac{(-1)^{\frac{2n+i-1}{2}}}{a(k_n^2+\alpha_i^2)^2}\, 4k_n^2\alpha_i^2\cosh k_n a $$
$$ J_i^{(3)} = \alpha_i(\cosh 2\alpha_i h + 2\alpha_i h/\sinh 2\alpha_i h) $$
$$ \bar{J}_i^{(3)} = \alpha_i\{\sinh 2\alpha_i h + 2(1-\nu)/\sinh 2\alpha_i h) $$
$$ K_i^{(3)} = \alpha_i^2 M/\sinh 2\alpha_i h - 12(-1)^{\frac{i-1}{2}}(2a^2\alpha_i^2-5)/5a^4\alpha_i^4 $$
$$ L_i^{(3)} = K\alpha_i^2\cosh 2\alpha_i h \quad \cdots\cdots (34') $$

が、得られる。したがって、式(31)，(32)，(33)および式(34)の4群の連立1次方程式を解き、未知定数C_0、$\bar{A}_n^{(2)}$，$C_i^{(2)}$および$\bar{C}_i^{(2)}$を求めることになるが、反復法で解く場合には$C_i^{(2)}$および$\bar{C}_i^{(2)}$については桁落ちの影響が強く現われ収束がなかなか困難である。そこで、新しい未知定数C_iおよび$\bar{C}_i$を導入して$C_i^{(2)}$および$\bar{C}_i^{(2)}$を次のように置きかえて計算する必要がある。

$$ C_i^{(2)} = C_i + \bar{C}_i \quad , \quad \bar{C}_i^{(2)} = C_i - \bar{C}_i \quad \cdots\cdots (35) $$



図－2　σ_xの分布



図－3　σ_zの分布

7. 数値計算例

計算例として、辺長比 $h/a=1.0$，荷重分布幅と辺長 a の比 $c/a=0.5$ および Poisson比 $\nu=0.25$ の正方形板を取り扱い、級数の項数を27項取って計算した。未知定数を求める4群の連立1次方程式は加速係数0.55を用いた反復法により解いた。図-2～図-4には、横軸に x/a，縦軸に応力の値を取り、パラメーターとして z を用いて、σ_x，σ_z および τ_{xz} の分布を示した。図-2に示されているように先端で荷重が分布している境界では、σ_x は無限大となり、また、$z=0.8h$ の σ_x は非常に小さい値となっている。図-3および図-4に示されているように $z=0.8h$ の σ_z は、ほぼ直線分布、$z=0.8h$ の τ_{xz} は、ほぼ放物線分布となっている。

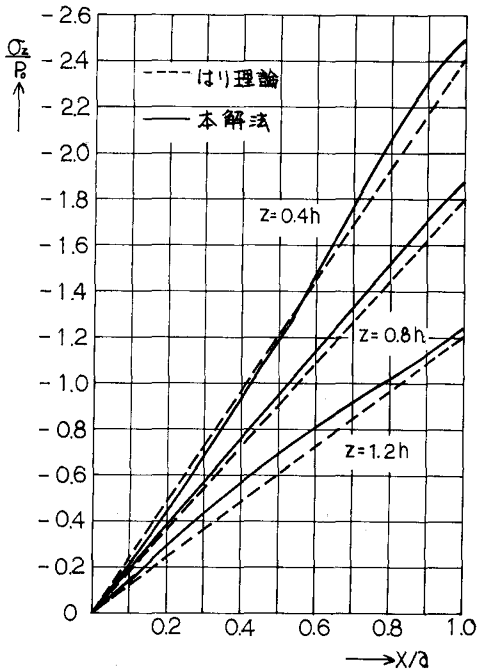


図-6　本解法とはり理論とによる σ_z の比較

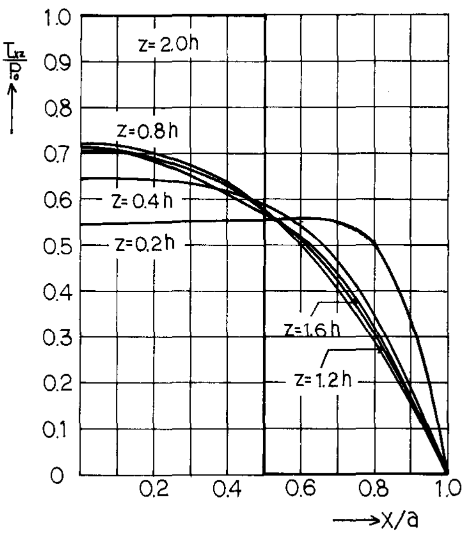


図-4　τ_{xz} の分布

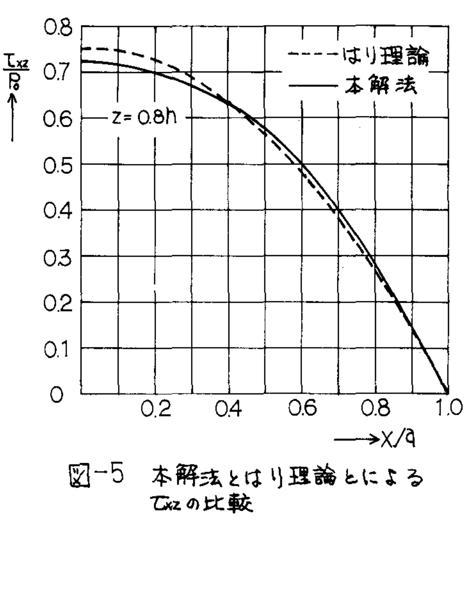


図-5　本解法とはり理論とによる τ_{xz} の比較

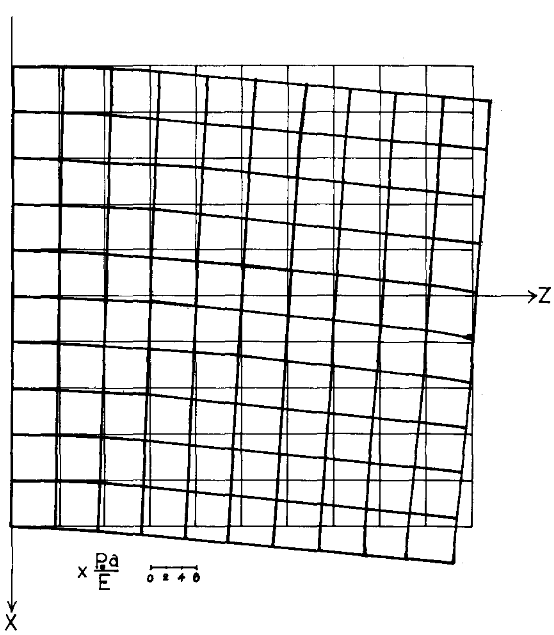
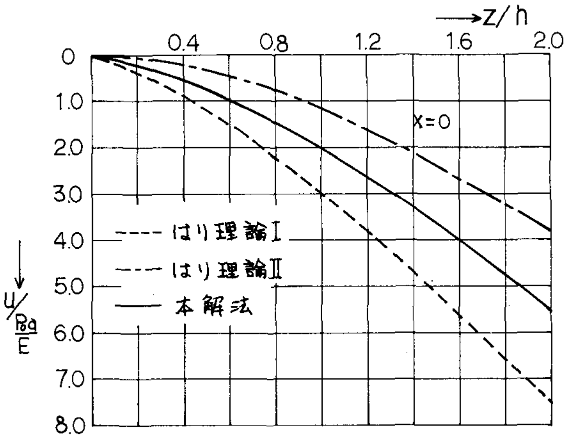
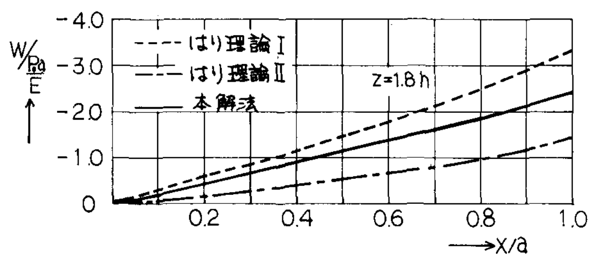


図-7　変形の状態

片持はりの曲げ理論によれば、σ_x は0，σ_z は直線分布、また、τ_{xz} は放物線分布となるが、固定端と先端とを十分に離れたところでは、本解法による結果とはり理論による結果がおおよそ一致していることがわかる。このことは *Saint-Venant* の原理からしても理解できることである。図－5および図－6には、本解法とはり理論とによる τ_{xz} および σ_z の比較を示した。図－7には、変形の状態を示した。図－8および図－9には、本解法とはり理論とによる変位の比較を示した。図中のはり理論Ⅰは、固定端の条件が $x=z=0$ において $u=w=\partial w/\partial x=0$，Ⅱは、$x=z=0$ において $u=w=\partial u/\partial z=0$ の場合である。図に示されているようにはり理論においても固定端の条件の相違により変位が大きく異っている。本解法は固定端の条件を厳密に満足しているものであり得られた変位の値は、図に示されているようにはり理論による二つの場合のほぼ中間に位置している。



図－8　本解法とはり理論とによる変位uの比較



図－9　本解法とはり理論とによる変位wの比較

8. あとがき

一端が完全に固定され、先端に部分的に分布した一様せん断荷重を受ける矩形厚板を平面ひずみ状態とみなし2次元応力問題として *Fourier* 級数解法により応力および変位の解析を行った。

本研究で得られた数値結果と良く知られている片持はりの曲げ理論による数値結果を比較すると、変位に大きな相違が見られた。このことは、片持はりの曲げの問題における固定端の境界条件が厳密なものではなく、本研究で取り扱ったような $h=a$ の正方形板の場合には、この固定端の境界条件の相違が変位に大きな影響を与えているためと思われる。数値計算例のところですでに述べたように、せん断荷重が部分的に作用している場合には σ_x が生じ、σ_z は直線分布とはならず、また、τ_{xz} は z に関して一定とはならないが、固定端と先端とを十分に離れた位置における応力は、片持はりの曲げ理論による応力とおおよそ一致していることがわかった。このことは、*Saint-Venant* の原理を裏付ける一つの結果と思われる。

変位が拘束されている固定端における応力の収束は非常に遅く、級数の項数を27項取った場合においても、まだ十分な収束値が得られなかった。そのため、固定端における応力の分布は図に示さなかった。また、矩形板の隅角部における収束も遅いようである。

参考文献

1) 小林　道明・石川　博将・秦　謹一：短い片持はりの二次元応力問題について，日本機械学会北海道支部第16回講演論文集，No. 732－1　PP. 57～60　，1973－10

2) 小林　道明・石川　博将・秦　謹一：短直方柱の応力解析（一端固定，上側面に部分的荷重を受ける片持はり類似の問題），機械学会論文集，第41巻348号　PP. 2265～2277，昭50－8

3) *Timoshenko*, S. P. and J. N. *Goodier*：*Theory of Elasticity*，P.41，3/e，*McGraw-Hill Kogakusha*，1970

4) 奥村　勇：部分分布のせん断荷重を受ける直方体の3次元応力解析について，第25回応用力学連合講演会 1975－10