

鉛直及びせん断荷重を受ける二層板の載荷点近傍の応力性状について

北海道大学 正員 芳村 仁
北海道大学 正員 荻 次 憲 吉
北海道大学 正員 〇三 上 隆

1. まえがき

本報告は土木構造物にみられる、弾性系二層板問題を道路橋にみられる舗装、床版をモデルとし、舗装を弾性挙動を示す構造要素と見なし、舗装と床版を弾性係数の異なる二層板として解析し、舗装表面上に作用する鉛直・せん断荷重による応力状態を調べたものである。この種の解析例として Sneddon²⁾らが Hankel 変換により均一な厚板の問題を軸対称問題として解いており、また 倉田圓田³⁾らは舗装・床版を二層弾性板と見なし三次元弾性学に基づき厚板理論により載荷点下の応力分布形状を求めておる。本報告は Hankel 変換による解法により、軸対称、非軸対称問題として解析し、載荷点近傍の応力性状を調べたものである。

2. 解析方法と応力式

2-1) 解析方法

座標軸 (r, θ, z) に選んだ円柱座標に於ける三次元弾性体のつり合い方程式は u_r, u_θ, u_z を r, θ, z 方向変位とする。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) &= 0 \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \left(\frac{u_\theta}{r} - 2 \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \right) &= 0 \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2)$$

ここに、 ∇^2 はラプラス演算子、 ν はポアソン比

式(1)は次の解によって満足される。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\} \\ u_\theta &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right\} \\ u_z &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{ただし } \nabla^2 \Phi = 0, \nabla^2 \Psi = 0 \quad (4)$$

また、応力成分は $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ を r, θ, z 方向の直応力、 $\sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$ をせん断応力とすると次のごとく書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right\} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right\} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r} \right\} \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-2\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} \end{aligned} \right\}$$

ここに Φ, Ψ を次の如く

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r, z) \cos n\theta$$

$$\Psi(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r, z) \sin n\theta \quad \text{と分離し}$$

$\Phi_n(r, z), \Psi_n(r, z)$ の Hankel-Transform

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(m, z) &= \int_0^{\infty} r \Phi_n(r, z) J_n(mr) dr \\ \Psi_n(m, z) &= \int_0^{\infty} r \Psi_n(r, z) J_n(mr) dr \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに $J_n(mr)$ は n 次の Bessel 函数

Hankel-Transform Φ_n, Ψ_n は次の微分方程式の解でないといけない。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right) \Phi_n(m, z) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right) \Psi_n(m, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)の解は

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(m, z) &= \{ A_n(m) + B_n(m) \cdot z \} e^{mz} + \{ C_n(m) + D_n(m) \cdot z \} e^{-mz} \\ \Psi_n(m, z) &= E_n(m) e^{mz} + F_n(m) e^{-mz} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに $A_n, B_n, \dots, F_n$ は境界条件より定まる定数である。

さらに(6)式の逆変換を行うと

$$\Phi_n(r, z) = \int_0^{\infty} m \Phi_n(m, z) J_n(mr) dm$$

$$\Psi_n(r, z) = \int_0^{\infty} m \Psi_n(m, z) J_n(mr) dm$$

となり $\Phi_n(r, z), \Psi_n(r, z)$ が決まる。これを式(3)及び式(5)に代入すると r, θ, z 方向の変位成分、応力成分の一般式が得られる。

$$\begin{aligned}
U_r &= -\frac{H\nu}{2E} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{(-A_n m + B_n(-mz) + 2E_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz)B_n \right. \\
&\quad \left. + 2F_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm + \int_0^{\infty} \{ (A_n m - B_n(-mz) + 2E_n) \bar{e}^{mz} \right. \\
&\quad \left. - (C_n m + (1+mz)B_n - 2F_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right] \cos n\theta \\
U_\theta &= -\frac{H\nu}{2E} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{(-A_n m + B_n(-mz) + 2E_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz)B_n \right. \\
&\quad \left. + 2F_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm - \int_0^{\infty} \{ (A_n m - B_n(-mz) + 2E_n) \bar{e}^{mz} \right. \\
&\quad \left. - (C_n m + (1+mz)B_n - 2F_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right] \sin n\theta \\
U_z &= -\frac{H\nu}{2E} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{(-A_n m^2 - 2B_n m(-1+2\nu) - B_n z m^2) \bar{e}^{mz} - (C_n m^2 \right. \\
&\quad \left. - 2B_n m(-1+2\nu) + B_n z m^2) e^{mz} \} m J_n(m\nu) dm \right] \cos n\theta \\
\sigma_{zz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{ (m A_n + m z B_n + (-1+2\nu) B_n) \bar{e}^{mz} - (m C_n + m z B_n - (-1+2\nu) B_n) \right. \\
&\quad \left. \} e^{mz} \} m^3 J_n(m\nu) dm \right] \cos n\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{ (-A_n m^2 + (-1+2\nu) m^2 B_n - m^3 z B_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m^2 + (1+2\nu) m^2 B_n \right. \\
&\quad \left. + m^3 z B_n) e^{mz} \} m J_n(m\nu) dm - \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \{ (-m A_n + (-1+mz) B_n) \bar{e}^{mz} \right. \\
&\quad \left. + (m C_n + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm - \frac{2}{r} \int_0^{\infty} (E_n \bar{e}^{mz} \right. \\
&\quad \left. + F_n e^{mz}) m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right] \cos n\theta \\
\sigma_{\theta r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{ B_n m \bar{e}^{mz} + D_n m e^{mz} \} m^2 J_n(m\nu) dm + \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \{ (-A_n m + (-1+mz) B_n) \right. \\
&\quad \left. \} \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r} \int_0^{\infty} (E_n \bar{e}^{mz} + F_n e^{mz}) m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right] \cos n\theta \\
\sigma_{rz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{ (E_n \bar{e}^{mz} + F_n e^{mz}) m^3 J_n(m\nu) dm - \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \{ (-A_n m + (-1+mz) B_n) \right. \\
&\quad \left. \} \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r} \int_0^{\infty} (E_n \bar{e}^{mz} + F_n e^{mz}) m^2 J_{n+1}(m\nu) dm \right] \sin n\theta \\
\sigma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \{ (A_n m - (-1+mz) B_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_n(m\nu) dm \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} \{ (A_n m - (-1+mz) B_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_n(m\nu) dm \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\pi/2} \{ (A_n m - (-1+mz) B_n) \bar{e}^{mz} + (C_n m + (1+mz) B_n) e^{mz} \} m^2 J_n(m\nu) dm \right] \sin n\theta
\end{aligned}$$

以上 (9) 式

2.1) 表面に垂直等分布荷重が作用する場合

図-1に示すモデルを考

える。上層板の板厚(h), 弾

性係数(E₁), 変形γ>比(ν₁),

下層板の板厚(H), 弾性係

数(E₂) 変形γ>比(ν₂) とし

荷重は半径a上に一様に作

用するものとする。こゝで上層板の定数K suffix (1), 下

層板のそれK suffix (2)をそれぞれ表わすことにし、以下軸

対称問題よりm=0と置く。 Hankel-Transform G_nは

$$\begin{aligned}
G_0^{(1)} &= (A_0^{(1)} + B_0^{(1)} z) \bar{e}^{mz} + (C_0^{(1)} + D_0^{(1)} z) e^{mz} \\
G_0^{(2)} &= (A_0^{(2)} + B_0^{(2)} z) \bar{e}^{mz} + (C_0^{(2)} + D_0^{(2)} z) e^{mz}
\end{aligned} \quad (10)$$

表面の荷重条件として

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)}(\gamma, \theta) &= -P = \cos \theta \quad (0 \leq r \leq a) \\
\sigma_{zz}^{(1)}(\gamma, \theta) &= 0 \quad (r > a) \\
\sigma_{rz}^{(1)}(\gamma, \theta) &= 0 \quad (0 \leq r < \infty)
\end{aligned} \quad (11)$$

境界条件として

$$\begin{aligned}
z = -h \text{ で } \quad \sigma_{zz}^{(1)} &= M(m), \quad \sigma_{rz}^{(1)} = 0 \\
z = 0 \text{ で } \quad \sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} \\
\quad \quad \quad u_z^{(1)} &= u_z^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \\
z = H \text{ で } \quad \sigma_{zz}^{(2)} &= 0, \quad \sigma_{rz}^{(2)} = 0
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\leq K \quad M(m) = -Pa J_1(ma)/m$$

以上の条件より8個の定数(A₀⁽¹⁾, B₀⁽¹⁾ ~ D₀⁽²⁾)が得られる。

u₁ = 0, u₂ = 0 とする

$$\begin{aligned}
m^2 A_0^{(1)} &= \frac{M(m)}{\Delta m} \{ A C (1+mh) e^{m(h+2H)} - (mh BC + A Q + \alpha \beta B) \bar{e}^{m(h-2H)} \\
&\quad - B F (1+mh) e^{m(h-2H)} - (mh BC + B S - A \alpha \beta) \bar{e}^{m(h+2H)} + \{ 4 m^2 A B H^2 \\
&\quad + mh (AB - CF) + L \} e^{mh} + \{ -4 m^2 B^2 H^2 + 2 m^2 (H^2 (A^2 + B^2) \\
&\quad - H h (A \alpha + B \beta) - m (h (B \alpha^2 + 2) + 16 \alpha H (1+\nu)) + L \} \bar{e}^{mh} \} \\
m B_0^{(1)} &= \frac{H(m)}{\Delta m} \{ A \bar{e}^{m(h+2H)} + B \bar{e}^{m(h-2H)} - B F e^{m(h-2H)} \\
&\quad + B \bar{e}^{m(h-2H)} + (4 m^2 A B H^2 + AB - CF) e^{mh} + \{ 4 m^2 B^2 H^2 \\
&\quad + (-2mh) + 2m (h (B \alpha^2 + 2) + H (A \alpha + B \beta)) + B^2 + \alpha^2 \} \bar{e}^{mh} \} \\
m^2 C_0^{(1)} &= \frac{H(m)}{\Delta m} \{ (-B \bar{e}^{mh} + B S - A \alpha \beta) e^{m(h+2H)} + B F (1-mh) e^{m(h-2H)} \\
&\quad + (-B \bar{e}^{mh} + A Q + B \alpha \beta) e^{m(h-2H)} - A \bar{e}^{m(h-2H)} + \{ -4 m^2 B^2 \\
&\quad H^2 + 2 m^2 (-H^2 (A^2 + B^2) + (A \alpha + B \beta) H) - m (h (B \alpha^2 + 2) + 16 \alpha H (1+\nu)) \\
&\quad - L \} \bar{e}^{mh} + \{ 4 m^2 A B H^2 (mh-1) + mh (AB - CF) + L \} e^{mh} \} \\
m D_0^{(1)} &= \frac{H(m)}{\Delta m} \{ B \bar{e}^{m(h+2H)} - B F e^{m(h-2H)} + B \bar{e}^{m(h-2H)} e^{m(h-2H)} \\
&\quad + A \bar{e}^{m(h+2H)} + \{ 4 m^2 B^2 H^2 + (-2mh) + 2m (h (B \alpha^2 + 2) - H (A \alpha + B \beta)) \\
&\quad + B^2 + \alpha^2 \} e^{mh} + (4 m^2 A B H^2 + AB - CF) \bar{e}^{mh} \} \\
m^2 A_0^{(2)} &= \frac{2H(m)}{\Delta m} \{ (C (mh-I) e^{m(h+2H)} + (-D mh + J) \bar{e}^{m(h-2H)} \\
&\quad + \{ 2 m^2 B H^2 (-2mh) + 2 m^2 \theta H h + m (2 H J + h B) + I - N \} e^{mh} \\
&\quad + \{ -m \bar{e}^{mh} (q + 2mh) - 2 m H (I - m A H) + N - J \} \bar{e}^{mh} \} \\
m B_0^{(2)} &= \frac{2H(m)}{\Delta m} \{ -A \bar{e}^{m(h+2H)} - B \bar{e}^{m(h-2H)} + \{ F - 2 m B H (-2mh) \} \\
&\quad \cdot e^{mh} + \{ -C (1-2mh) - 2 m A H \} \bar{e}^{mh} \} \\
m^2 C_0^{(2)} &= \frac{2H(m)}{\Delta m} \{ (-D mh + J) \bar{e}^{m(h-2H)} + (C mh + I) \bar{e}^{m(h+2H)} \\
&\quad + \{ m \bar{e}^{mh} (2mh - q) - 2 m H (m A H + I) + J - N \} e^{mh} + \{ -2 m^2 B H^2 \\
&\quad + (-2mh) - 2 m^2 \theta H h + m (2 H J + h B) + N - I \} \bar{e}^{mh} \} \\
m^2 D_0^{(2)} &= \frac{2H(m)}{\Delta m} \{ -B \bar{e}^{m(h+2H)} - A \bar{e}^{m(h-2H)} + \{ 2 m A H - C (1+2mh) \} \\
&\quad \cdot e^{mh} + \{ F + 2 m B H (-2mh) \} \bar{e}^{mh} \}
\end{aligned}$$

$$\Delta = A \bar{e}^{m(h+H)} + \bar{e}^{2m(h+H)} - B F (\bar{e}^{m(h-H)} + \bar{e}^{m(h-H)})$$

$$+ \{ B \bar{e}^{m(h+H)} - A F \} (\bar{e}^{2mh} + \bar{e}^{2mh}) + 2 (2 A B m^2 H^2 + (1-\nu) \cdot$$

$$\bar{e}^{2mh} + \bar{e}^{2mh}) + 4 \{ m^2 (4 B^2 m^2 H^2 + (A^2 + B^2) H^2 + C B^2 + C^2) h^2$$

$$- 2 A H (A \alpha + B \beta) + L \} \quad (14)$$

$$\leq K \quad A = 1 + \alpha, \quad B = 1 - \alpha, \quad C = 4 \nu - 3 \alpha - 1, \quad D = (1 - \alpha) (1 + 4 \nu)$$

$$F = 4 \nu - 3 \alpha + 1, \quad q = 1 - 4 \nu, \quad I = \alpha + 2 \nu, \quad J = \alpha - 2 \nu$$

$$L = \alpha^2 (8 \nu^2 - 2 \nu + 5), \quad N = 8 \nu (1 + \nu), \quad Q = 1 - 2 \alpha (1 - \nu)$$

$$S = 1 + 2 \alpha (1 - \nu), \quad \theta = 1 - 2 \nu$$

さらに $\alpha = (1 + \nu) E_1 / 1.5 E_2$

以上の定数を(9)式に代入すると応力式が得られる。

Eと ν は、 $\delta v_z^{(1)}$ は

$$\delta v_z^{(1)} = \int_0^{\infty} \frac{2H(m)}{\Delta} m \left\{ m(ch-Az) - \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + Bm(2mhZ - h-z) + \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} - Bm(2mhZ+h-z) - \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + [m(ch-Az) + \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + \{4m^3BHh(h-z) + 2m^2HB(h-h-z) + m(chB + Fz + 2H\alpha\beta) + \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + \{2m^2H(z)(ch-Ah) - m(\angle(ch+2H) + 2H\alpha\beta) - \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + \{4m^3BHh(h-z) - 2m^2HB(h-h-z) + m(chB + Fz + 2H\alpha\beta) - \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} + \{2m^2H(z)(ch-Ah) - m(\angle(ch+2H) + 2H\alpha\beta) + \alpha\beta \int e^{m(ch+2H-z)} \} J_1(mr) dm \right. \quad (15)$$

2.2) 表面に一樣なせん断荷重が作用する場合

図-2の様なモデルを考へ、

荷重は半径 a の円上に一樣に作用しているものとす。非軸対称問題より $n=1$ と置き、上層板の n 変数に suffix (1)、下層板の n 変数に suffix (2)となく(8)式はつぎのようになる。

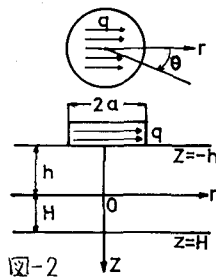


図-2

$$\left. \begin{aligned} G_1^{(1)}(m, z) &= (A_1^{(1)} + B_1^{(1)} z) e^{mz} + (C_1^{(1)} + E_1^{(1)} z) e^{-mz} \\ H_1^{(1)}(m, z) &= E_1^{(1)} e^{mz} + F_1^{(1)} e^{-mz} \\ G_1^{(2)}(m, z) &= (A_1^{(2)} + B_1^{(2)} z) e^{mz} + (C_1^{(2)} + E_1^{(2)} z) e^{-mz} \\ H_1^{(2)}(m, z) &= E_1^{(2)} e^{mz} + F_1^{(2)} e^{-mz} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

表面の荷重条件として

$$\left. \begin{aligned} \delta v_z^{(1)} &= -f \cos \theta (r \leq a), \quad \delta \sigma_z^{(1)} = f \sin \theta (r \leq a) \\ \delta v_z^{(1)} &= \delta \sigma_z^{(1)} = 0 \quad (r > a), \quad \delta \sigma_z^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

境界条件として

$$\left. \begin{aligned} z = -h \text{ で } \delta \sigma_z^{(1)} &= 0, \quad \delta v_z^{(1)} = -f \cos \theta \quad (r \leq a) \\ \delta \sigma_z^{(1)} &= f \sin \theta \quad (r \leq a), \quad \delta v_z^{(1)} = \delta \sigma_z^{(1)} = 0 \quad (r > a) \\ z = 0 \text{ で } \delta \sigma_z^{(1)} &= \delta \sigma_z^{(2)}, \quad \delta v_z^{(1)} = \delta v_z^{(2)}, \quad \delta \sigma_z^{(1)} = \delta \sigma_z^{(2)} \\ u_z^{(1)} &= u_z^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)} \\ z = H \text{ で } \delta \sigma_z^{(2)} &= 0, \quad \delta v_z^{(2)} = 0, \quad \delta \sigma_z^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\leq r \leq N(m) = f a J_1(ma) / m$$

以上の条件より12個の定数($A_1^{(1)} \sim F_1^{(2)}$)が得られる。

$u = v_z = a \sin \theta$ とする

$$\begin{aligned} m A_1^{(1)} &= \frac{N(m)}{m \Delta} \left[m h e^{m(ch+2H)} + K m h e^{m(ch-2H)} + K^2 m h e^{m(ch-2H)} + K m h e^{m(ch+2H)} - 2 m h K e^{m h} (1 + 2 m^2 H^2) + \{ 4 m^3 B H h^2 K^2 + 2 m^2 H (h+H) (1-K^2) - m h (1+K^2) \} e^{m h} \right] \\ m B_1^{(1)} &= \frac{N(m)}{m \Delta} \left[e^{m(ch+2H)} + K (1+2 m h) e^{m(ch-2H)} + K^2 e^{m(ch-2H)} + K (1+2 m h) e^{m(ch+2H)} - 2 K (1+2 m^2 H^2) e^{m h} - \{ K^2 (4 m^2 H^2 (1+2 m h) \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 m (h-H) + 1) + 2 m (h+H) + 1 \} e^{m h}$$

$$m C_1^{(1)} = \frac{N(m)}{m \Delta} \left[-K m h e^{m(ch+2H)} - K^2 m h e^{m(ch-2H)} - K m h e^{m(ch-2H)} - m h e^{m(ch+2H)} + \{ 4 m^3 B H h^2 K^2 + 2 m^2 H (h+H) (1-K^2) + m h (1+K^2) \} e^{m h} + 2 K m h (1+2 m^2 H^2) e^{m h} \right]$$

$$m E_1^{(1)} = \frac{N(m)}{m \Delta} \left[-K (1-2 m h) e^{m(ch+2H)} - K^2 e^{m(ch-2H)} - K (1-2 m h) e^{m(ch-2H)} - e^{m(ch+2H)} + \{ K^2 (4 m^2 H^2 (1-2 m h) - 2 m (h-H) + 1) + (1-2 m (h+H)) \} e^{m h} + 2 K (1+2 m^2 H^2) e^{m h} \right]$$

$$m F_1^{(1)} = \frac{N(m)}{m \Delta} \left[-e^{m h} + K e^{-m h} \right]$$

$$m F_1^{(2)} = \frac{N(m)}{m \Delta} \left[-e^{m h} + K e^{m h} \right]$$

$$m A_1^{(2)} = \frac{2 N(m)}{(1+\alpha) m \Delta} \left[m h e^{m(ch+2H)} + K m h e^{m(ch-2H)} + K m \{ 2 m H (h+H-2 m h H) - h \} e^{m h} + m e^{m h} \{ 2 m H (h+H) - h \} \right]$$

$$m B_1^{(2)} = \frac{2 N(m)}{(1+\alpha) m \Delta} \left[e^{m(ch+2H)} + K (1+2 m h) e^{m(ch-2H)} + K (4 m^2 h H - 2 m H - 1) e^{m h} - \{ 1 + 2 m (h+H) \} e^{m h} \right]$$

$$m C_1^{(2)} = \frac{2 N(m)}{(1+\alpha) m \Delta} \left[-K m h e^{m(ch-2H)} - m h e^{m(ch+2H)} + m \{ h + 2 m H (h+H) \} e^{m h} + K m \{ h + 2 m H (h+H) + 2 m h H \} e^{m h} \right]$$

$$m E_1^{(2)} = \frac{2 N(m)}{(1+\alpha) m \Delta} \left[-K (1-2 m h) e^{m(ch-2H)} - e^{m(ch+2H)} + \{ 1 - 2 m (h+H) \} e^{m h} + K (1-2 m H - 4 m^2 h H) \right]$$

$$m F_1^{(2)} = -\frac{2 N(m)}{m \Delta (1+\alpha)} e^{m h}$$

$$m F_1^{(2)} = -\frac{2 N(m)}{m \Delta (1+\alpha)} e^{-m h}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= - (e^{2 m (h+H)} + e^{2 m (h-H)} - K^2 (e^{2 m (h-H)} + e^{2 m (h+H)})) \\ &\quad - 2 K (1+2 m^2 H^2) (e^{2 m h} + e^{2 m H}) + 2 K (1+2 m^2 H^2) (e^{2 m h} + e^{2 m H}) \\ &\quad + 8 m^2 h H \{ (1-K^2 (1-2 m^2 h H)) + 2 K (1+K^2) \{ 1 + 2 m^2 (h^2 + H^2) \} \} \\ \delta &= (1+\alpha) (e^{m(ch+H)} - e^{m(ch-H)}) + (1-\alpha) (e^{m(ch-H)} - e^{m(ch+H)}) \end{aligned}$$

(19)

$$\leq r \leq K = (1+\alpha)/(1+\alpha), \text{ さらに } \alpha = E_1/E_2$$

以上の定数を(19)式に代入すると応力式が得られる。

Eと ν は、 $\delta v_z^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} \delta v_z^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{N(m)}{\Delta} m \left[-\{ 1 - m (h+z) \} e^{m(ch+2H-z)} - K^2 \{ 1 - m (h+z) \} e^{m(ch-2H-z)} \right. \\ &\quad \cdot e^{m(ch-2H-z)} - K \{ 1 + m (h-z-2 m h H) \} (e^{m(ch-2H-z)} + e^{m(ch+2H-z)}) \\ &\quad - K \{ 1 - m (h-z+2 m h H) \} (e^{m(ch+2H-z)} + e^{m(ch-2H-z)}) - K^2 \{ 1 + m (h+z) \} e^{m(ch-2H-z)} \\ &\quad \cdot \{ 1 + m (h-z-2 m h H) \} (1 + K^2 (1 + 4 m^2 H^2)) + 2 m H (1-K^2) \\ &\quad \cdot \{ 1 + m (h+H-z) \} e^{m(ch+2H-z)} + \{ (1-m (h-z+2 m h H)) (1 + K^2 (1 + 4 m^2 H^2)) \\ &\quad - 2 m H (1-K^2) (1 - m (h+H-z)) \} e^{m(ch+2H-z)} + 2 K (1+2 m^2 H^2) \{ 1 + m (h+z) \} \\ &\quad \cdot e^{m(ch-2H-z)} \} (J_2(mr) - J_0(mr)) dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{N(m)}{\Delta} \left[K (e^{m(ch+2H-z)} - e^{m(ch-2H-z)}) - (e^{m(ch-H-z)} - e^{m(ch+H-z)}) \right] \\ &\quad \cdot (J_2(mr) + J_0(mr)) dm \cos \theta \quad (20) \end{aligned}$$

3. 解析例

解析例として、アスファルト舗装-鋼床版を例にとり解析する。計算に用いた諸数値は、舗装厚として $h=8\text{cm}$

弾性係数 $E_1 = 10^4 \text{ kg/cm}^2$ 、鋼床
版厚として $H = 1.2 \text{ cm}$ 、弾性係
数 $E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン
比として、垂直等分布荷重載
荷では $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 0.3$ と
し、せん断荷重載荷の場合は
 $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$ とした。又荷重

半径 a として道路示方書によ
る後輪荷重面積換地長 = 20 cm
輪帯幅 = 50 cm に等価半径
 a として、 $a = 17.84 \text{ cm}$ を用
いた。以下に述べる数値計算
例は無限積分を Simpson の積
分公式によりえた値である。

なお、垂直等分布荷重載荷の
ときは、 r/a でのせん断応力
 σ_{rz} の総和は荷重がつり合うこと、せん断荷重のときは、 r/a での
応力 σ_{rr} の総和が荷重に等しいことを数値的に確かめている。

図-3、図-4、図-5は垂直等分布荷重載荷での応力 σ_{zz} , σ_{rz} , σ_{rr}
を示したものである。図-3は σ_{zz} を各断面における半径方向の分
布を示したもので、断面が深くなる程応力が減少している。図-4
は応力 σ_{rz} を各半径における断面深さ方向の応力分布を示した図で
弾性係数の大きい下層板床版に応力集中が見られる。図中で太い実
線は弾性係数の変化する境界面を表わしている。図-5の応力 σ_{rr} は
各半径における断面深さ方向の応力 σ_{rr} を示したもので、下層板に
応力が大きくでている。図-6、図-7はせん断荷重が作用した場合の
応力 σ_{rz} , σ_{rr} を $\theta = 0$ の各半径における断面深さ方向の応力を示した
もので、応力 σ_{rz} は深さ
方向の変化より表面に近い所で横方向に広がっており、下層板の
応力は半径方向の大きさの影響が少なく一定値を示す傾向がある。
図-7の応力 σ_{rr} は応力の分布形状は垂直等分布荷重載荷でのそれと
同じになっているが、
下層板の応力は垂直等分布荷重載荷の半径方向の大きさの影響が
少ない。以上結果より、

- ・応力 σ_{zz} は垂直等分布荷重載荷では弾性係数の大きい下層板に
応力が大きく現れれているが、せん断荷重のときの
応力分布形状は深さ方向の変化より表面に近い所で横方向に
広がっている。
- ・応力 σ_{rr} は垂直等分布及びせん断荷重載荷とも弾性係数の
大きい下層板の応力変化が大きく、せん断荷重を受ける
時でも下層板が曲げを受ける挙動を示している。

参考文献

- 1) Yohimura, J., Ushio, S., Sugawara, T.: Stresses in Multi Layered systems, Memories of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ., Vol. XIII, No. 2 1972
- 2) Sneddon, I.N.: Fourier Transforms, McGraw-Hill, 1951
- 3) 倉田宗章・園田忠一郎・堀川都太郎: 道路橋床版の輪荷重下の応力の評価, 第30回年次学術講演会講演概要集 土木部 1975.

