

円柱を含む無限厚板の軸対称応力解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

円柱あるいは円筒そのものの軸対称問題に関する理論および解法は、すでに体系づけられ、一応完成されているように思われるが、円柱が他の弾性体で取り囲まれている場合のような複雑な境界条件を持つ構造についての研究はあまり見られないようである。古くは、半無限円筒が半無限弾性体で取り囲まれ、物体力および外力が作用する問題に関する鈴木¹⁾の研究、また、比較的新しいのでは、円柱が円筒で取り囲まれ、円柱と円筒との端面に外力が作用する問題に関する能町・松岡^{2),3)}らの研究が見受けられる程度である。

本論文は、円柱が無限厚板で取り囲まれ、円柱の端面に部分的圧縮荷重が作用する場合の3次元応力問題を、H. Neuberの解に基づいて解析するものである。この応力問題は、円柱を取り囲む無限厚板の弾性定数を0と置くことにより、側面が自由で端面に部分的圧縮荷重を受ける短円柱そのものの軸対称問題、また、円柱と無限厚板との弾性定数を等しく置くことにより、無限厚板の上、下表面に部分的圧縮荷重が作用する無限厚板そのものの軸対称問題に帰着されるという興味ある性質を持っている。

2. 基本解と応力関数

変位で表わされたり合い方程式の基本解を、H. Neuber にしたがって、次のように置く。

$$2G u = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\bar{z} \quad (1)$$

$$\text{ここで、} F = r\bar{z} + \bar{z}_0 \quad (2), \quad \nabla^2 \bar{z}_0 = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 \bar{z} = 0 \quad (4), \quad \bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3), \quad r = (r, \theta, z)$$

式(1)の u は変位ベクトル、 G および ν はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。また、式(3)および式(4)の ∇^2 はラプラス演算子である。

図-1に示した円柱を含む無限厚板の応力状態が $z=0$ に関して対称となることおよび軸対称問題を取り扱っていることを考慮して、式(3)および式(4)を解くと、円柱に関する応力関数は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_3 &= -\sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} J_0(\alpha_s r) \cosh \alpha_s z \\ \bar{z}_2 &= -\sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} J_0(\alpha_s r) \sinh \alpha_s z + G_0 z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\bar{z}_{01} = -\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(1)} I_0(\beta_n r) \cos \beta_n z, \quad \bar{z}_{11} = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)} I_1(\beta_n r) \cos \beta_n z + F_0 r \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_s = \lambda_s/a$ で λ_s は $J_0(\lambda_s) = 0$ の第 s 番目の正根、また、 $\beta_n = n\pi/h$ とする。 $A_s^{(1)}, \dots, F_0$ などは境界条件によって求められるべき未知定数である。

円柱を取り囲む無限厚板に関する応力関数は、無限遠で変位および応力が消失しなければならないことを考慮して、式(3)および式(4)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_3 &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} J_0(\gamma_k r) + B_k^{(2)} Y_0(\gamma_k r)) \cosh \gamma_k z \\ \bar{z}_2 &= -\sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)} \left(J_0(\gamma_k r) - \frac{J_0(\gamma_k)}{Y_0(\gamma_k)} Y_0(\gamma_k r) \right) \sinh \gamma_k z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\bar{z}_{01} = -\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(2)} K_0(\beta_n r) \cos \beta_n z + E_0 \ln r, \quad \bar{z}_{11} = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)} K_1(\beta_n r) \cos \beta_n z \quad (8)$$

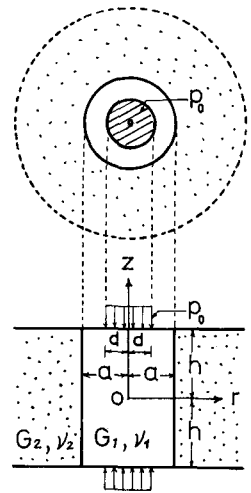


図-1 円柱を含む無限厚板

ここで、 $\gamma_k = \delta_k / a$ で δ_k は a より十分大きな数で

$$Y_0(\delta_k) J_0(\delta_k b/a) - J_0(\delta_k) Y_0(\delta_k b/a) = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

を満足する第 k 番目の正根とする。また、 $A_k^{(2)}, \dots, F_n^{(2)}$ などは境界条件によって求められるべき未知定数である。

3. 応力の式

円柱および無限厚板の変位と応力にそれぞれ subscript 1 および 2 を付して表わし、さらに、式 (5) および式 (7) から得られる変位と応力には superscript (1)、式 (6) および式 (8) から得られる変位と応力には superscript (2) を付して表わし、一例として、 σ_{z1} と τ_{rz1} について示せば次のようである。

$$\sigma_{z1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} d_s J_0(d_s r) \{ \{ d_s A_s^{(1)} - 2(1-\nu_1) G_s^{(1)} \} \cosh d_s z + G_s^{(1)} d_s z \sinh d_s z \} + 2(1-\nu_1) G_0 \dots \dots \dots (10)$$

$$\tau_{rz1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-d_s) J_1(d_s r) \{ \{ d_s A_s^{(1)} - (1-2\nu_1) G_s^{(1)} \} \sinh d_s z + G_s^{(1)} d_s z \cosh d_s z \} \dots \dots \dots (11)$$

$$\sigma_{z1}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \cos \beta_n z \{ \{ \beta_n E_n^{(2)} + 2\nu_1 F_n^{(2)} \} I_0(\beta_n r) + F_n^{(2)} \beta_n r I_1(\beta_n r) \} + 4\nu_1 F_0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\tau_{rz1}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \sin \beta_n z \{ \{ \beta_n E_n^{(2)} - 2(1-\nu_1) F_n^{(2)} \} I_1(\beta_n r) + F_n^{(2)} \beta_n r I_0(\beta_n r) \} \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma_{z2}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{ J_0(\gamma_k r) \{ \{ \gamma_k A_k^{(2)} - 2(1-\nu_2) G_k^{(2)} \} \cosh \gamma_k z + G_k^{(2)} \gamma_k z \sinh \gamma_k z \} + Y_0(\gamma_k r) \{ \{ \gamma_k B_k^{(2)} + 2(1-\nu_2) \frac{J_0(\delta_k)}{Y_0(\delta_k)} G_k^{(2)} \} \cosh \gamma_k z - \frac{J_0(\delta_k)}{Y_0(\delta_k)} G_k^{(2)} \gamma_k z \sinh \gamma_k z \} \} \dots \dots \dots (14)$$

$$\tau_{rz2}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-\gamma_k) \{ J_1(\gamma_k r) \{ \{ \gamma_k A_k^{(2)} - (1-2\nu_2) G_k^{(2)} \} \sinh \gamma_k z + G_k^{(2)} \gamma_k z \cosh \gamma_k z \} + Y_1(\gamma_k r) \{ \{ \gamma_k B_k^{(2)} + (1-2\nu_2) \frac{J_0(\delta_k)}{Y_0(\delta_k)} G_k^{(2)} \} \sinh \gamma_k z - \frac{J_0(\delta_k)}{Y_0(\delta_k)} G_k^{(2)} \gamma_k z \cosh \gamma_k z \} \} \dots \dots \dots (15)$$

$$\sigma_{z2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \cos \beta_n z \{ \{ \beta_n E_n^{(2)} - 2\nu_2 F_n^{(2)} \} K_0(\beta_n r) + F_n^{(2)} \beta_n r K_1(\beta_n r) \} \dots \dots \dots (16)$$

$$\tau_{rz2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \beta_n z \{ \{ \beta_n E_n^{(2)} + 2(1-\nu_2) F_n^{(2)} \} K_1(\beta_n r) + F_n^{(2)} \beta_n r K_0(\beta_n r) \} \dots \dots \dots (17)$$

ここで、 ν_1 および ν_2 はそれぞれ円柱および無限厚板のポアソン比を表わすものとする。

4. 境界条件

円柱の端面および無限厚板の表面における境界条件は次のようである。

$$(\tau_{rz1}^{(1)} + \tau_{rz1}^{(2)})_{z=\pm h} = 0, \quad (0 \leq r \leq a) \quad \dots \dots (18), \quad (\tau_{rz2}^{(1)} + \tau_{rz2}^{(2)})_{z=\pm h} = 0, \quad (a \leq r < \infty) \quad \dots \dots (19)$$

$$(\sigma_{z1}^{(1)} + \sigma_{z1}^{(2)})_{z=\pm h} = -2p_0 \left(\frac{d}{a} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\frac{d}{a} \lambda_s \right)}{\lambda_s J_1'(\lambda_s)} J_0(d_s r), \quad (0 \leq r \leq a) \quad \dots \dots \dots (20)$$

$$(\sigma_{z2}^{(1)} + \sigma_{z2}^{(2)})_{z=\pm h} = 0, \quad (a \leq r < \infty) \quad \dots \dots \dots (21)$$

また、円柱と無限厚板との接線面における境界条件は次のようである。

$$(\sigma_{r1}^{(1)} + \sigma_{r1}^{(2)})_{r=a} = (\sigma_{r2}^{(1)} + \sigma_{r2}^{(2)})_{r=a} \quad \dots \dots (22), \quad (\tau_{rz1}^{(1)} + \tau_{rz1}^{(2)})_{r=a} = (\tau_{rz2}^{(1)} + \tau_{rz2}^{(2)})_{r=a} \quad \dots \dots (23)$$

$$(\tau_{rz1}^{(1)} + \tau_{rz1}^{(2)})_{r=a} = (\tau_{rz2}^{(1)} + \tau_{rz2}^{(2)})_{r=a} \quad \dots \dots (24), \quad (\tau_{rz1}^{(1)} + \tau_{rz1}^{(2)})_{r=a} = (\tau_{rz2}^{(1)} + \tau_{rz2}^{(2)})_{r=a} \quad \dots \dots (25)$$

境界条件 (18) および (19) より未知定数間の関係が次のように求められる。

$$A_s^{(1)} = G_s^{(1)} (1-2\nu_1 - d_s h \coth d_s h) / d_s \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$A_k^{(2)} = \frac{G_k^{(2)}}{\gamma_k} (1-2\nu_2 - \gamma_k h \coth \gamma_k h), \quad B_k^{(2)} = -\frac{J_0(\delta_k)}{\gamma_k Y_0(\delta_k)} G_k^{(2)} (1-2\nu_2 - \gamma_k h \coth \gamma_k h) \quad \dots \dots (27)$$

したがって、式 (26) および式 (27) を用いて、superscript (1) を付した変位および応力の式から $A_s^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ および $B_k^{(2)}$ を消去することができる。一例として、 $\sigma_{z1}^{(1)}$ について示せば次のようである。

$$\sigma_{z1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-d_s) G_s^{(1)} J_0(d_s r) \{ (1 + d_s h \coth d_s h) \cosh d_s z - d_s z \sinh d_s z \} + 2(1-\nu_1) G_0 \quad \dots \dots (28)$$

また、無限厚板の superscript (1) を付した変位および応力は、次のように定義された Cylinder function で表わされることになる。

$$C_0(\gamma_k r) = J_0(\gamma_k r) - (J_0(d_k)/Y_0(d_k))Y_0(\gamma_k r), \quad C_1(\gamma_k r) = J_1(\gamma_k r) - (J_0(d_k)/Y_0(d_k))Y_1(\gamma_k r)$$

5. 7群の無限連立1次方程式

式(22)～(25)の円柱と無限厚板との接界面における境界条件を満たすためには、superscript (1) を付した変位および応力をおのおの Fourier 級数に展開することが必要となる。結果のみを示すことにすると境界条件(23)から次の関係が得られる。

$$\sum_{s=1}^{\infty} s H_n^{(1)} G_s^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k N_n^{(1)} G_k^{(2)} + L_n^{(1)} \beta_n E_n^{(1)} + M_n^{(1)} F_n^{(1)} + O_n^{(1)} F_n^{(2)} + P_n^{(1)} \beta_n E_n^{(2)} = 0 \quad \dots \quad (29)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s H_n^{(1)} &= \frac{4(H)^n d_s^2 J_1}{h(d_s^2 + \beta_n^2)^2} \sinh d_s h, \quad k N_n^{(1)} = \frac{4(H)^n \gamma_k^2 C_1}{h(\gamma_k^2 + \beta_n^2)^2} \sinh \gamma_k h, \quad L_n^{(1)} = I_1, \\ M_n^{(1)} &= \beta_n a I_0 - 2(1 - \gamma_1) I_1, \quad O_n^{(1)} = \beta_n a K_0 + 2(1 - \gamma_2) K_1, \quad P_n^{(1)} = K_1 \end{aligned} \right\} \dots \quad (29')$$

式(29')の J_1 , C_1 , I_0 , I_1 , K_0 および K_1 などは便宜的記号で次の量を表わす。

$$J_1 = J_1(d_s), \quad C_1 = C_1(d_k), \quad I_0 = I_0(\beta_n a), \quad I_1 = I_1(\beta_n a), \quad K_0 = K_0(\beta_n a), \quad K_1 = K_1(\beta_n a) \quad \dots \quad (30)$$

境界条件(24)より次の二つの関係が得られる。

$$\sum_{s=1}^{\infty} s H_n^{(2)} G_s^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k N_n^{(2)} G_k^{(2)} - L_n^{(2)} \beta_n E_n^{(1)} - M_n^{(2)} F_n^{(1)} - O_n^{(2)} F_n^{(2)} - P_n^{(2)} \beta_n E_n^{(2)} = 0 \quad \dots \quad (31)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s H_n^{(2)} &= \frac{4 \varepsilon d_s (H)^n J_1}{h(d_s^2 + \beta_n^2)^2} \{\beta_n^2 - \gamma_1(d_s^2 + \beta_n^2)\} \sinh d_s h, \quad L_n^{(2)} = \varepsilon I_1, \\ k N_n^{(2)} &= \frac{4 \gamma_k (H)^n C_1}{h(\gamma_k^2 + \beta_n^2)^2} \{\beta_n^2 - \gamma_2(\gamma_k^2 + \beta_n^2)\} \sinh \gamma_k h, \quad P_n^{(2)} = K_1, \\ M_n^{(2)} &= \varepsilon \{\beta_n a I_0 - 4(1 - \gamma_1) I_1\}, \quad O_n^{(2)} = \beta_n a K_0 + 4(1 - \gamma_2) K_1, \quad \varepsilon = G_2/G_1 \end{aligned} \right\} \dots \quad (31')$$

$$2 \varepsilon (1 - 2 \gamma_1) F_0 a + \varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} \frac{2 \gamma_1 J_1}{h d_s} \sinh d_s h = \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)} \frac{2 \gamma_2 C_1}{h \gamma_k} \sinh \gamma_k h - \frac{F_0}{a} \quad \dots \quad (32)$$

境界条件(25)より次式が得られる。

$$L_n^{(3)} \beta_n E_n^{(1)} + M_n^{(3)} F_n^{(1)} + 4 \varepsilon (1 - 2 \gamma_1) (-1)^n G_0 / \beta_n - O_n^{(3)} F_n^{(2)} - P_n^{(3)} \beta_n E_n^{(2)} = 0 \quad \dots \quad (33)$$

ここで

$$L_n^{(3)} = \varepsilon I_0, \quad M_n^{(3)} = \varepsilon \beta_n a I_1, \quad O_n^{(3)} = \beta_n a K_1, \quad P_n^{(3)} = K_0 \quad \dots \quad (33')$$

境界条件(22)より次の二つの式

$$\sum_{s=1}^{\infty} s H_n^{(3)} G_s^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k N_n^{(3)} G_k^{(2)} + L_n^{(3)} \beta_n E_n^{(1)} + M_n^{(3)} F_n^{(1)} - O_n^{(3)} F_n^{(2)} - P_n^{(3)} \beta_n E_n^{(2)} = 0 \quad \dots \quad (34)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} s H_n^{(3)} &= \frac{4(H)^n d_s^2 J_1}{h(d_s^2 + \beta_n^2)^2} \{\beta_n^2 - \gamma_1(d_s^2 + \beta_n^2)\} \sinh d_s h, \quad L_n^{(3)} = \beta_n a I_0 - I_1, \\ k N_n^{(3)} &= \frac{4(H)^n \gamma_k^2 C_1}{h(\gamma_k^2 + \beta_n^2)^2} \{\beta_n^2 - \gamma_2(\gamma_k^2 + \beta_n^2)\} \sinh \gamma_k h, \quad P_n^{(3)} = \beta_n a K_0 + K_1, \\ M_n^{(3)} &= (4 - 4 \gamma_1 + \beta_n^2 a^2) I_1 - (3 - 2 \gamma_1) \beta_n a I_0, \quad O_n^{(3)} = (4 - 4 \gamma_2 + \beta_n^2 a^2) K_1 + (3 - 2 \gamma_2) \beta_n a K_0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (34')$$

$$2 \gamma_1 G_0 + 2 F_0 - \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} \frac{2 \gamma_1 J_1}{a h d_s} \sinh d_s h = - \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)} \frac{2 \gamma_2 C_1}{a h \gamma_k} \sinh \gamma_k h + \frac{F_0}{a^2} \quad \dots \quad (35)$$

が得られる。これで $r=a$ における境界条件(22)～(25)は満たされたことになる。円柱の端面および無限厚板の表面における境界条件(20)および(21)を満たすためには、superscript (2) を付した応力

$(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=\pm h}$ および $(\sigma_{z2}^{(2)})_{z=\pm h}$ を Bessel の級数にそれぞれ展開することが必要となる。一例として、境界条件 (20) について述べることにする。又 $z=\pm h$ における $\sigma_{z1}^{(1)}$ および $\sigma_{z1}^{(2)}$ は式 (28) および式 (12) より、それぞれ

$$(\sigma_{z1}^{(1)})_{z=\pm h} = \sum_{s=1}^{\infty} (-d_s) G_s^{(1)} J_0(d_s r) \left(\cosh d_s h + \frac{d_s h}{\sinh d_s h} \right) + 2(1-\nu_1) G_0 \dots \dots \dots (36)$$

$$(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=\pm h} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) (1)^n \{ \beta_n E_n^{(1)} I_0(\beta_n r) + F_n^{(1)} (2\nu_1 I_0(\beta_n r) + \beta_n r I_1(\beta_n r)) \} + 4\nu_1 F_0 \dots \dots \dots (37)$$

となる。ここで、式 (37) の r を含む項を Bessel 展開すると

$$\beta_n E_n^{(1)} I_0(\beta_n r) + F_n^{(1)} (2\nu_1 I_0(\beta_n r) + \beta_n r I_1(\beta_n r)) = \frac{2d_s}{a(d_s^2 + \beta_n^2) J_1} [\beta_n E_n^{(1)} I_0 + F_n^{(1)} \{ 2(\nu_1 + \frac{\beta_n^2}{d_s^2 + \beta_n^2}) I_0 + \beta_n a I_1 \}] J_0(d_s r)$$

となるので、式 (37) は次のように書き直される。

$$(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=\pm h} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2(d_s)^n \beta_n d_s}{a(d_s^2 + \beta_n^2) J_1} [\beta_n E_n^{(1)} I_0 + F_n^{(1)} \{ 2(\nu_1 - \frac{\beta_n^2}{d_s^2 + \beta_n^2}) I_0 + \beta_n a I_1 \}] J_0(d_s r) + 4\nu_1 F_0 \dots \dots \dots (37')$$

したがって、式 (36) および式 (37') より境界条件 (20) を満たすために次の二つの関係が得られる。

$$\text{ここで } Q_s^{(1)} G_s^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (n R_s^{(1)} \beta_n E_n^{(1)} + n S_s^{(1)} F_n^{(1)}) = \beta_0 \cdot 2 \left(\frac{d_s}{a} \right) \frac{J_1 \left(\frac{d_s}{a} \lambda_s \right)}{\lambda_s J_1^2} \dots \dots \dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_s^{(1)} &= d_s \left(\cosh d_s h + \frac{d_s h}{\sinh d_s h} \right), \quad n R_s^{(1)} = \frac{2(d_s)^n \beta_n d_s}{a(d_s^2 + \beta_n^2) J_1} I_0 \\ n S_s^{(1)} &= \frac{2(d_s)^n \beta_n d_s}{a(d_s^2 + \beta_n^2) J_1} \left\{ \beta_n a I_1 + 2 \left(\nu_1 - \frac{\beta_n^2}{d_s^2 + \beta_n^2} \right) I_0 \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38')$$

$$2(1-\nu_1) G_0 + 4\nu_1 F_0 = 0 \dots \dots \dots (39)$$

境界条件 (21) については結果のみを示すことにすると、次の関係が得られる。

$$Q_k^{(2)} G_k^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (n R_k^{(2)} \beta_n E_n^{(2)} + n S_k^{(2)} F_n^{(2)}) = 0 \dots \dots \dots (40)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} Q_k^{(2)} &= \gamma_k \left(\cosh \gamma_k h + \frac{\gamma_k h}{\sinh \gamma_k h} \right) \\ n R_k^{(2)} &= \frac{2\beta_n (1)^n \gamma_k}{(b^2 C_1^2 (\gamma_k b) - a^2 C_1^2 (\gamma_k^2 + \beta_n^2))} \cdot (b C_1 (\gamma_k b) K_0(\beta_n b) - a C_1 K_0) \\ n S_k^{(2)} &= \frac{2\beta_n (1)^n \gamma_k}{(b^2 C_1^2 (\gamma_k b) - a^2 C_1^2 (\gamma_k^2 + \beta_n^2))} \cdot [b C_1 (\gamma_k b) \{ \beta_n b K_1(\beta_n b) + 2 \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\beta_n^2}{\gamma_k^2 + \beta_n^2} - \nu_2 \right) K_0(\beta_n b) \} + \\ &\quad - a C_1 \{ \beta_n a K_1 + 2 \left(\frac{\beta_n^2}{\gamma_k^2 + \beta_n^2} + \right. \\ &\quad \left. - \nu_2 \right) K_0 \}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40')$$

6個の境界条件 (20) ~ (25) より式 (29)

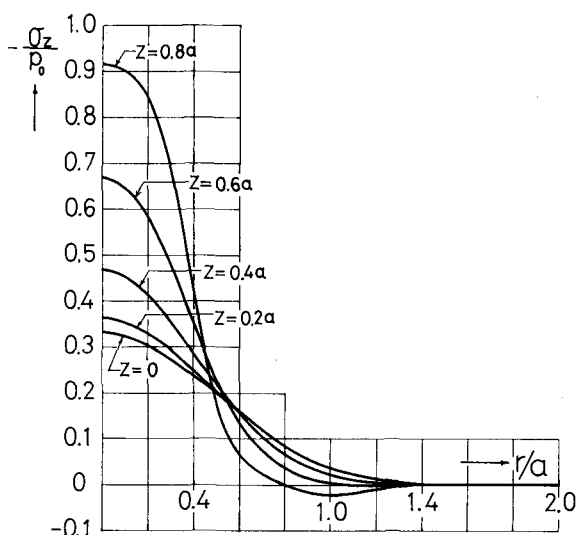


図-2 σ_z の分布 ($G_1=G_2$, $\nu_1=\nu_2$, $d/a=0.4$)

, (31), (32), (33), (34), (35), (38), (39) および式 (40) の9個の関係が得られたが, これらの中で, 式 (32), (35) および式 (39) より

$$G_0 = \left(\frac{a}{h}\right) \cdot \frac{2\nu_1^2(1-\varepsilon)}{2\nu_1^2 - (1-\nu_1)\{1+\varepsilon(1-2\nu_1)\}} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} \frac{J_1}{a\lambda_s} \sinh \alpha_s h \dots \dots \dots (41)$$

$$F_0 = -\left(\frac{a}{h}\right) \cdot \frac{\nu_1(1-\nu_1)(1-\varepsilon)}{2\nu_1^2 - (1-\nu_1)\{1+\varepsilon(1-2\nu_1)\}} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} \frac{J_1}{a\lambda_s} \sinh \alpha_s h \dots \dots \dots (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{a^2} = & -2\varepsilon(1-2\nu_1)F_0 - 2\varepsilon\nu_1\left(\frac{a}{h}\right) \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} \\ & \cdot \frac{J_1}{a\lambda_s} \sinh \alpha_s h + 2\nu_2\left(\frac{a}{h}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(2)} \\ & \cdot \frac{C_1}{a\delta_k} \sinh \delta_k h \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

の関係が得られるので, 最終的には, 式 (29), (31), (33), (34), (38), (40) および式 (41) の7群の無限連立1次方程式を解き, 7個の未知定数 $G_s^{(1)}$, $G_k^{(2)}$, $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$, $F_n^{(1)}$, $F_n^{(2)}$ および G_0 を求めることになる。 F_0 および E_0 は $G_s^{(1)}$ および $G_k^{(2)}$ が求められれば, 式 (42) および式 (43) より求められる。

6. 数値計算例

計算例として, s , h および n をそれぞれ40項取り, 次の三つの場合について応力の分布を求めた。Bessel 関数の根 λ_s および Cylinder function の根 δ_k は Regula-Falsi 法により求めた。

(1) 円柱と無限厚板との弾性定数が等しい場合 ($G_1 = G_2$, $\nu_1 = \nu_2$)

この場合には, 無限厚板そのものの上, 下表面に部分的圧縮荷重が作用する応力問題と等価になるが, $h=a$, $d/a=0.4$, $b=20a$ および $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ として応力を求め, 図-2~図-5にそれぞれ示した。

(2) 無限厚板の弾性定数が0の場合 ($G_2 = 0$, $\nu_2 = 0$)

この場合には, 未知定数 $G_k^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $E_n^{(2)}$ および E_0 は0となり, 無限厚板の変位および応力はすべて0となる。したがって, この場合には, 側面が自由で端面に部分的圧縮荷重を受ける短円柱そのものの応力問題と等価になるが, この問題については斎藤⁵⁾の研究がある。それと比較するために, $h=a$, $d/a=0.2$ および $\nu_1=0.25$ として応力を求めたところ, 円柱の端面における

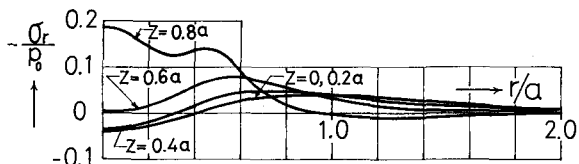


図-3 σ_r の分布 ($G_1=G_2$, $\nu_1=\nu_2$, $d/a=0.4$)

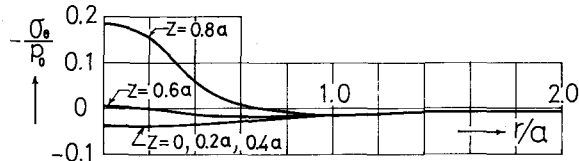


図-4 σ_θ の分布 ($G_1=G_2$, $\nu_1=\nu_2$, $d/a=0.4$)

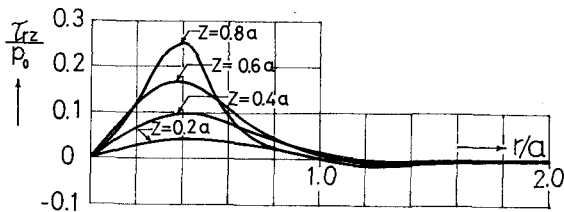


図-5 τ_{rz} の分布 ($G_1=G_2$, $\nu_1=\nu_2$, $d/a=0.4$)

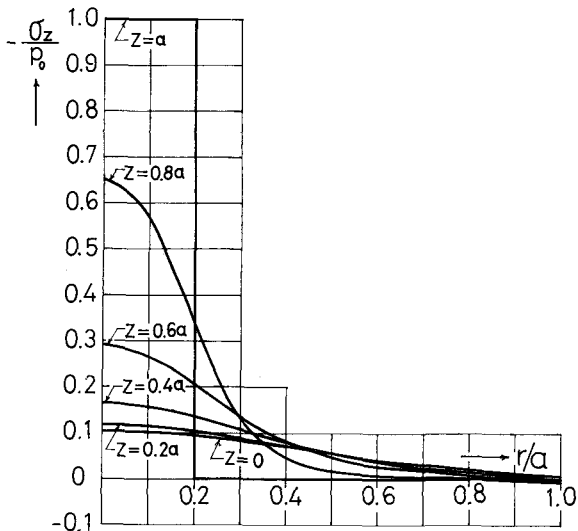


図-6 σ_z の分布 ($G_2=0$, $\nu_2=0$, $d/a=0.2$)

σ_r と σ_θ の値がいくぶん異なるのみで、円柱の内部では、斎藤の研究と良く一致した結果が得られた。例として、 σ_z の分布を図-6 に示した。

(3) 円柱と無限厚板との弾性定数がそれぞれ異なる場合

$h=a$, $d/a=0.4$, $b=20a$ とし、弾性定数は、それぞれ、 $E_1=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $E_2=420 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.5$, ($\varepsilon=G_2/G_1=0.0016$) として計算した。無限厚板の縦弾性係数 E_2 が円柱の縦弾性係数 E_1 に比較して非常に小さいために、無限厚板の応力および変位は円柱のそれらに比較するとほとんど 0 に近い値となり、(2) の場合の応力状態と同じような結果が得られた。応力の分布を図-7 ~ 図-10 にそれぞれ示した。

7. 結 語

H. Neubert の解に基づいて、円柱を取り囲んだ無限厚板の 3 次元応力解析を行った。級数の項数を 40 項まで取り計算したが、 $z=\pm h$ の表面で円柱と無限厚板とが接続する部分における応力はまだ十分に収束していないようであり、図には示さなかった。円柱と無限厚板との接続面で、数値計算上、どの程度一致した数値が得られるかということは興味のあることであるが、(1) の計算例では、表面を除けば、 τ_{rz} については数値 2 桁、他の応力および変位については数値 3 ~ 4 桁一致した値が得られた。(2) の計算例では、側面における σ_r および τ_{rz} は消失しなければならないが、数値計算の上では、 10^{-6} のオーダーの数値となり、円柱そのものの応力状態を十分に満足した良い計算結果が得られた。

参考文献

- 1) 鈴木 光：巻立圓形聖坑の應力分布，日本鑛業會誌，第 65 卷 733 號，pp.118-123，昭 24-4-5
- 2) 能町純雄・松岡健一：鉄筋付着強度試験における付着応力の分布に関する理論的研究，土木学会第 25 回年次學術講演會，第 IV 部，pp.15-18，昭 45-11
- 3) 松岡健一：鉄筋とコンクリートの付着応力分布に関する三次元応力学的研究，土木学会北海道支部研究発表會論文集，第 27 号，pp.179-185，昭 46-2
- 4) 宮本 博：3 次元弾性論，p.17，裳華房，昭 42
- 5) 斎藤秀雄：短円柱および円盤の軸対称変形，機械学会論文集，第 18 卷 68 号，pp.21-28，昭 27-3

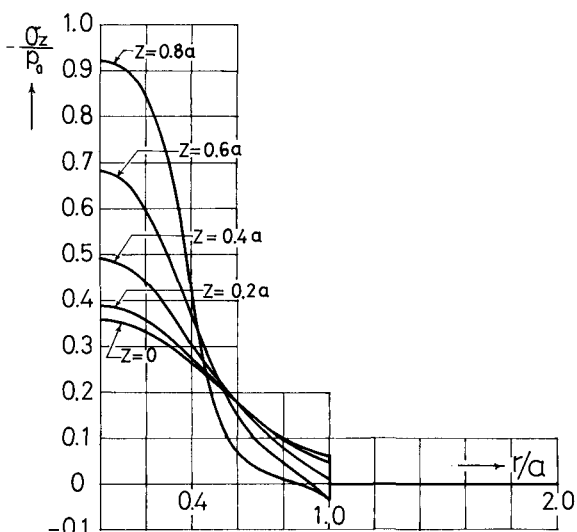


図-7 σ_z の分布 ($G_2/G_1=0.0016$, $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.5$)

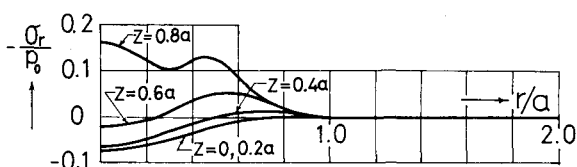


図-8 σ_r の分布 ($G_2/G_1=0.0016$, $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.5$)

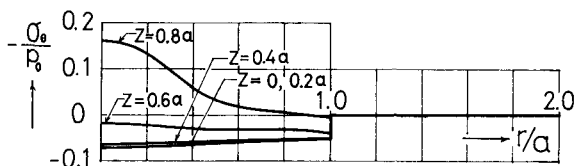


図-9 σ_θ の分布 ($G_2/G_1=0.0016$, $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.5$)

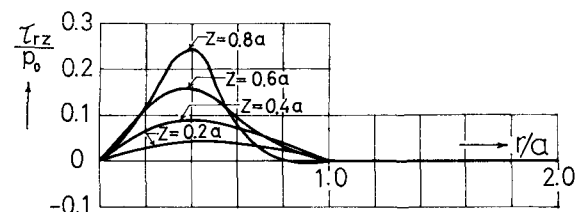


図-10 τ_{rz} の分布 ($G_2/G_1=0.0016$, $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.5$)