

同心円状に異質な円環を含む有限円柱の3次元応力解析について

室蘭工業大学 正員 中村 作太郎
室蘭工業大学 学生員 〇竹本 和生

1. まえがき

有限円柱の3次元弾性問題は既に解析されているが、特に有限要素法による場合は不均質な円柱の解析も可能で、すでに若干の研究が行われている。¹⁾²⁾この種の問題として、有限円柱が異質な物質を含む場合、それが変位や応力の分布にどのような影響を及ぼすかを知ることは、鉄筋コンクリート柱などとの関連で、興味のある問題である。

本論文は、有限曲線角柱要素法を用い、同心円状に異質な円環を含む有限円柱について解析を行うもので、この理論及び計算の妥当性を検討するために、軸対称荷重を受けた円柱及び円筒についても解析を行った。

2. 有限曲線角柱要素法³⁾

この理論はZienkiewicz等により発表されている⁴⁾ものであり、断面一様性を持つ回転体に対し、回転方向にFourier級数展開を用いることにより、3次元問題を2次元問題に還元できる利点をもつ。

図-1に示すような曲線角柱要素を考え、節点の自由度を3とし、変位 $\{f\} = \{u \ v \ w\}^T$ の方向を図示の通りとすれば、変位は下記のように θ 方向にFourier級数展開できる。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^m(r, z) \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ v^m(r, z) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ w^m(r, z) \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u^m(r, z) &= \alpha_1^m + \alpha_2^m r + \alpha_3^m z \\ v^m(r, z) &= \alpha_4^m + \alpha_5^m r + \alpha_6^m z \\ w^m(r, z) &= \alpha_7^m + \alpha_8^m r + \alpha_9^m z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

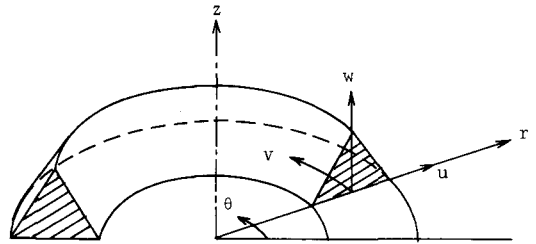


図-1 曲線角柱要素と変位成分

と要素内で一次変化を仮定する。各々の変位に対応する節点力を $\{F\} = \{F_u \ F_v \ F_w\}^T$ と表わし、その方向も一致させる。

要素の節点変位のFourier級数展開 m 項目の係数を $\{\delta_e^m\} = \{u_1^m \ v_1^m \ w_1^m \ u_2^m \ v_2^m \ w_2^m \ u_3^m \ v_3^m \ w_3^m\}^T$ と表わすと、

$$\{\delta_e^m\} = [A] \cdot \{\alpha^m\} \quad (3)$$

ここで

$$\{\alpha^m\} = \{\alpha_1^m \ \alpha_2^m \ \alpha_3^m \ \alpha_4^m \ \alpha_5^m \ \alpha_6^m \ \alpha_7^m \ \alpha_8^m \ \alpha_9^m\}^T \quad (4)$$

また、要素内任意点の変位のFourier級数 m 項目の係数を $\{f^m\} = \{u^m \ v^m \ w^m\}^T$ と表わすと、(3)式より

$$\{f^m\} = [n] \cdot \{\alpha^m\} = [n] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta_e^m\} \quad (5)$$

ひずみと変位の関係は、弾性論⁵⁾より次の如くである。

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\left. \begin{aligned} r_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} & r_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} & r_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

よって、ひずみベクトル $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r \varepsilon_x \varepsilon_\theta r_{rx} r_{r\theta} r_{x\theta}\}^T$ を節点変位ベクトル $\{\delta_e^m\}$ で表わすと、(3)式より、

$$\{\varepsilon\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \cdot \{\alpha^m\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta_e^m\} \quad (7)$$

ここで

$$[B^m] = [\bar{B}^m] \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} + [\bar{\bar{B}}^m] \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \quad (8)$$

応力とひずみの関係より、応力ベクトル $\{\sigma\} = \{\sigma_r \sigma_x \sigma_\theta \tau_{rx} \tau_{r\theta} \tau_{x\theta}\}^T$ を節点変位ベクトル $\{\delta_e^m\}$ で表わすと

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta_e^m\} \quad (9)$$

ここでは等方性体を考えることとし、縦弾性係数を E 、ポアソン比を ν とすれば、 $[D]$ は次式となる。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(3),(7),(9)を用い、仮想仕事の原理より、剛性マトリックス $[K^m]$ を誘導する。Fourier級数 m 項目の仮想変位を $\bar{1}$ とすると、(8)式より、

$$\begin{aligned} [K^m] &= \int_V [A]^{-1T} \cdot [B^m]^T \cdot [D] [B^m] \cdot [A]^{-1} dV \\ &= \frac{\theta_0}{2} \int_x [A]^{-1T} \{ [\bar{B}^m]^T [D] [\bar{B}^m] + [\bar{\bar{B}}^m]^T [D] [\bar{\bar{B}}^m] \} [A]^{-1} ds \\ &\quad \left(\because \int_0^{\theta_0} \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \int_0^{\theta_0} \cos^2 \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \frac{\theta_0}{2}, \quad \int_0^{\theta_0} \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = 0 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

また、荷重項についても同様に Fourier 級数展開して、仮想仕事の原理により、

$$\{F^m\} = \{F_u^m F_v^m F_w^m\} \cdot \frac{\theta_0}{2} \quad (12)$$

ここで、 $F_u^m F_v^m F_w^m$ に対して、等分布荷重の場合

$$\{F_e^m\} = \frac{2p\theta_0}{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta_x}{\theta_0} \quad (13)$$

上式中、 p ；単位長さ当りの荷重強度

θ_a ；載荷幅を与える中心角の $1/2$

θ_x ；載荷部重心までの中心角

本報告においては、 $\theta_0 = 2\pi$, $\theta_a = \pi$, $\theta_x = \pi$ で、

$m=0$ 即ち $\{F_e^m\} = p$ とし解析を行っている。

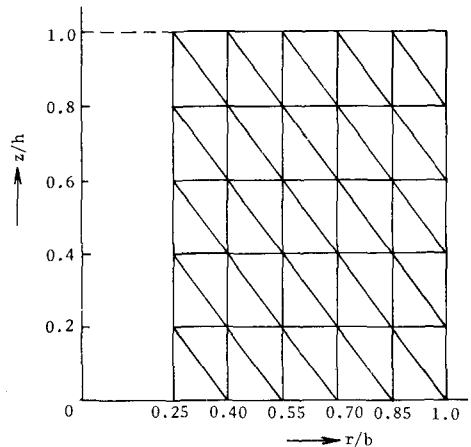


図-2 円筒の要素分割図

図-3 円筒の変形状態

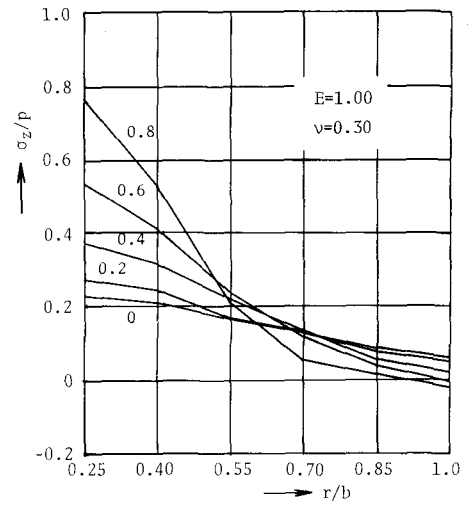
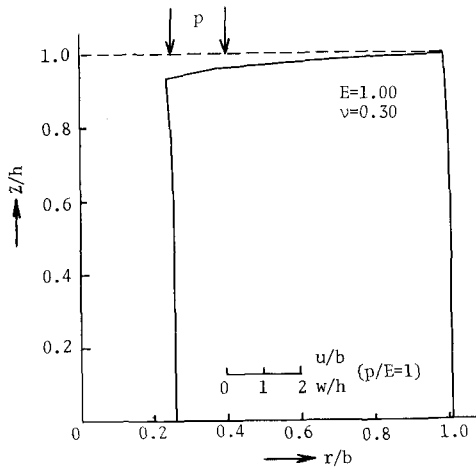


図-4 σ_z の分布(円筒)

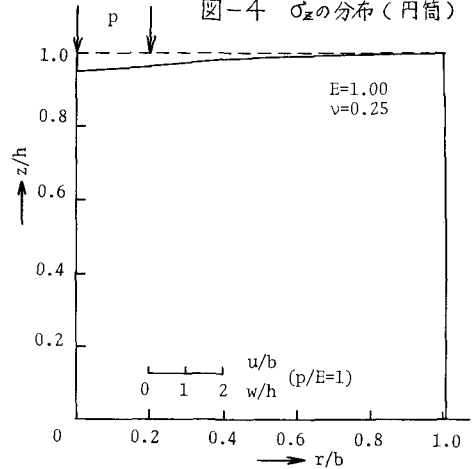


図-5 円柱の変形状態

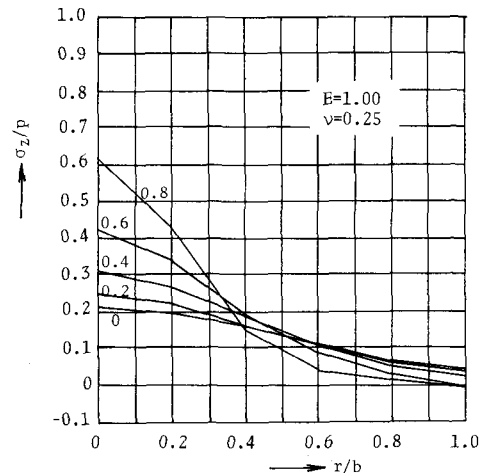


図-6 σ_z の分布(円柱)

3. 軸対称荷重を受けた円柱及び円筒の解析

解析対象は、円柱・円筒ともに、高さ h 、外径 $2b$ ($h=b$)なる等方性体になめらかな剛体平面上にあり、同心円状軸圧力を受けた場合とする。

円筒の内径は外径の $1/4$ とし、解析は図-2に示す要素分割を用い、 $E=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.3$ で行った。載荷点は、 $r/b=0.25, 0.40$ であり、計算結果を図-3, 4に示す。

円柱も $r/b=0 \sim 1.0$ (0.2 刻み)、 50 要素を用いて、 $E=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.25$ として解析を行った。載荷点は $r/b=0, 0.2$ であり、計算結果を図-5, 6に示す。

いずれの場合も、要素分割の粗さ、載荷条件の相異から若干の誤差はあるが、既往の解析値に適合すると思われる。⁶⁾⁷⁾

4. 同心円状に異質な円環を含む有限円柱の解析

解析に用いた円柱も上述の円柱と同形状であるが、要素分割は図-7のようである。図中ハッチした部分が異質要素であり、 $E=7.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.25$ である。他の要素はすべて、 $E=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.17$ とした。荷重は上端6節点全てに同心円状軸圧力を載せた。

異質円環の影響をより鮮明にするために、図-7の太線部を拡大して、図-8, 9に変位図と等応力線図を示した。応力集中が比較的局所的であるのに対し、変位の拘束は広範に及ぶ傾向があるようである。しかし、図-9から解るように、異質付近の応力の変化がかなり大きく、分割の精度に対する検討が充分ではないので、今後更に、分割数・荷重条件・異質物の大きさ等種々の条件で、解析を進め、

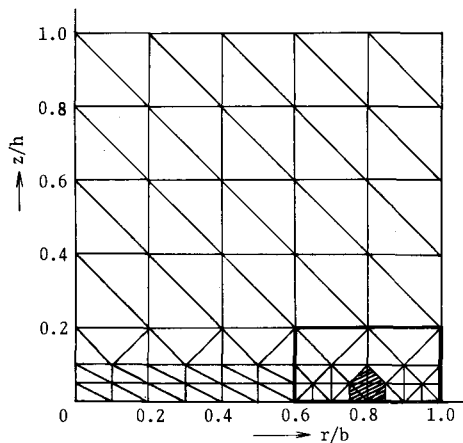


図-7 異質物を含む円柱の要素分割図

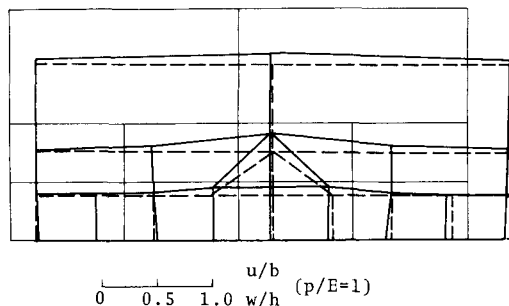


図-8 異質部付近の変形状態
(破線は等質のみの場合)

検討する予定である。

5. あとがき

本論文では、軸対称荷重を取り扱ったが、今後非軸対称問題についても解析を行う予定である。

なお、本計算には北大大型計算機センターのFACOM 230-75を使用した。

最後に本研究において、助言を頂きました本学土木工学科尾崎訓教授、松岡健一助教授に感謝の意を表します。

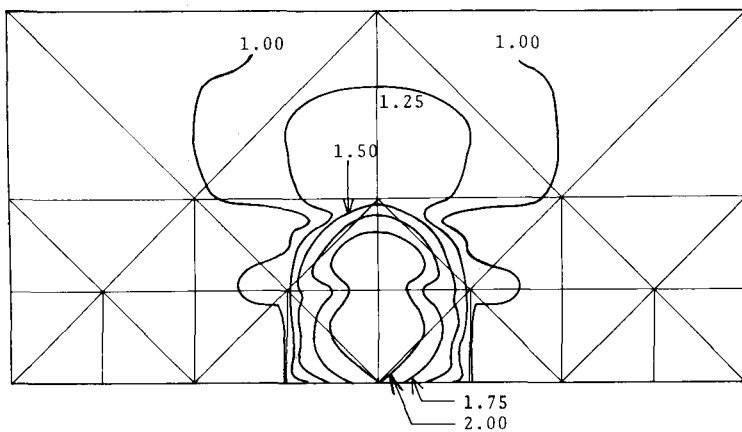


図-9 異質部付近の等応力線図(平均応力を1.0とする)

<参考文献>

- 1) 芳村, 三上, 池守 有限要素法による軸対称問題の解析およびその応用について.
土木学会北海道支部 昭和48年度 研究発表会論文報告集
- 2) 芳村, 三上, 鳴海 トンネル切羽近傍における応力性状について
土木学会北海道支部 昭和49年度 研究発表会論文報告集
- 3) 尾崎, 橋本 曲線折板構造の立体的解析 土木学会北海道支部 昭和49年度 研究発表会論文報告集
- 4) O. C. Zienkiewicz "The Finite Element Method in Engineering Science"
- 5) S. P. Timoshenko & J. N. Goodier "Theory of Elasticity"
- 6) 柴原, 尾田 軸対称変形をする有限円筒問題 機械学会論文集 昭和43年 34巻 259号
- 7) 青藤秀雄 短円柱および円盤の軸対称変形 機械学会論文集 昭和27年 18巻 68号