

傾斜した地表面をもつ弾性地山中のトンネル切羽近傍の
応力性状について

北海道大学 正員 芳村 仁
北海道開発局 正員 ○石原 勝

1. まえがき

岩盤中の掘削が主たるトンネルにおいては土被りが大きくその土圧は種々の要因に作用され、これらを逐一考慮してトンネル周辺の応力解析を行なうことは非常にむずかしい。ここでは、現実の複雑極まる応力性状の基本的動向の探求のため、岩盤を等方均質な弾性体とみなし、その応力性状を解析した。

以下、トンネルを断面が円で三次元的に軸対称な回転体と仮定し、特にトンネル軸方向の応力性状の解析を有限要素法によって試みたものである。一昨年度は軸対称荷重下の条件で^①昨年度は地表面が水平状態で非軸対称荷重を受けた条件で^②同様の手法を用いてトンネル切羽近傍の応力解析を行い報告した。本報告はこれらの実績を踏まえ、さらに、図-1に示すごとく傾斜した地表面を有する弾性岩盤中、深い位置で掘削されたトンネル切羽近傍の応力性状の究明を行なったものである。

尚、計算に際しては節点数の増加をはかり、かつ演算時間を短縮する目的でサブストラクチャー法を導入した。

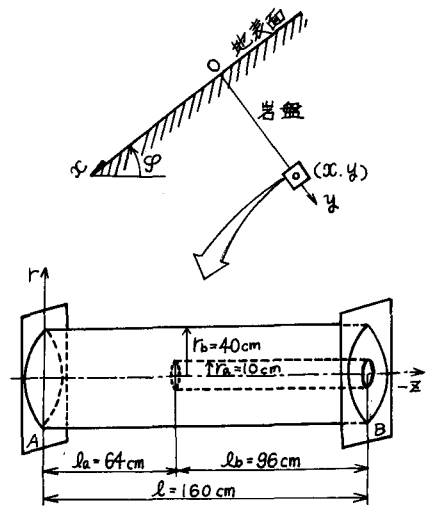


図-1 トンネルモデル

2. 軸対称立体が非軸対称荷重を受けた場合の応力解析

円周方向に非軸対称な分布荷重を回転角の三角級数の和として表わすと、級数の直交性より各次の波に対する解析が可能であり、線形弾性の範囲内において展開項ごとの応力、変位を合成すれば最初の非軸対称荷重に対する解を得ることができる。

円筒座標系において、図-2のごとく要素の変位、外力を円周方向と軸方向に分け、円周方向に対してはフーリエ級数に展開し、軸方向にはZ-r座標で定義する。

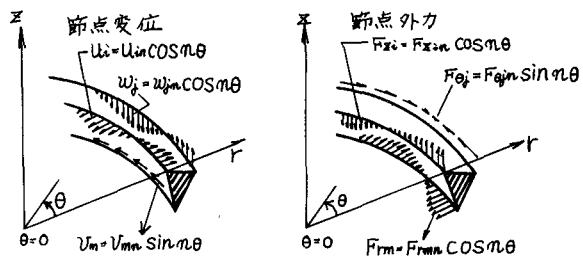


図-2 節点における変位および外力

F_r, F_z, F_θ および u, w, v をそれぞれ r, z, θ 方向の節点外力および節点変位とすれば、

$$\left. \begin{aligned} F_r &= \sum F_{rn} \cos n\theta \\ F_z &= \sum F_{zn} \cos n\theta \\ F_\theta &= \sum F_{\theta n} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum u_n \cos n\theta \\ w &= \sum w_n \cos n\theta \\ v &= \sum v_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \begin{array}{l} * \quad n \text{ は任意の} \\ \text{展開次数} \end{array}$$

一般の展開次数 n について変位関数は

$$\left. \begin{aligned} u &= (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z) \cos n\theta = u_n \cos n\theta \\ w &= (\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z) \cos n\theta = w_n \cos n\theta \\ v &= (\alpha_7 + \alpha_8 r + \alpha_9 z) \sin n\theta = v_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

9つの定数 $\alpha_1 \sim \alpha_9$ は (r, z) に節点座標を代入して得られる方程式を解くことによって得られる。

3つの節点座標を (r_i, z_i) , (r_j, z_j) , (r_m, z_m) とし、各点の u 方向の変位を u_i, u_j, u_m とすると、定数 $\alpha_1 \sim \alpha_3$ は u_i, u_j, u_m で次のように表わすことができる。

$$u_n = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i r + c_i z) u_i + (a_j + b_j r + c_j z) u_j + (a_m + b_m r + c_m z) u_m \} \quad (4)$$

ここで $a_i = r_j z_m - r_m z_j$, $b_i = z_j - z_m$, $c_i = r_m - r_j$ などである。

Δ ; 三角形 i, j, m の面積

$\alpha_4 \sim \alpha_9$ も同様にして表わすことができる。

要素内のすべての点で変位が与えられれば、円筒座標系における変位-ひずみ関係式を用いてひずみを求めることができる。

$$\{\epsilon_n\} = [B] \{\delta_n\}^e = [B_i, B_j, B_m] \{\delta_n\}^e \quad (5) \quad \left(\text{ここで } \{\delta_{in}\} = \begin{Bmatrix} u_{in} \\ v_{in} \end{Bmatrix}, \{\delta_n\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_{in} \\ \delta_{jn} \end{Bmatrix} \right)$$

なお、 $\{\epsilon\} = \{\epsilon_n(\cos n\theta \text{ or } \sin n\theta)\}$

要素の応力を $\{\sigma\} = \{\sigma_n(\cos n\theta \text{ or } \sin n\theta)\}$ とすると次式により応力が求まる。

$$\{\sigma_n\} = [D] \{\epsilon_n\} \quad (6)$$

なお $[B_i]$, $[D]$ などは次のようなマトリックスで表示される。

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{r}{r} N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ -\frac{r}{r} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \\ 0 & -\frac{r}{r} N_i & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7) \quad [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i r + c_i z)$, E ; 岩盤の弾性係数, ν ; 岩盤のポアソン比

剛性マトリックスは上記のマトリックスを用いることにより次式で求められる。

$$[K] = \pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (9)$$

マトリックス $[B]$ が座標に依存するため、積分は簡単に遂行できないが、マトリックス積を作って項別積分する方法で求めた。

3. 地山の応力状態

地下に空洞が全く開削されていない岩盤を地山と呼ぶことにする。地山の応力状態は一概に論ずることはできないが、ここでは岩盤は均質等方性の完全弾性体であるものとし、かつ岩盤の重量だけが地山の応力状態に関係するものと仮定する。

まず最初に地山の表面が水平な場合を考える。このような岩盤中に空洞がつくられたとすると、そのまわりの応力状態が乱れ、空洞周辺には付加的な大きい応力を生ずることになる。今、開削された空洞半径が地表面からの深さに比べてごく小さいとすると、地表面の影響は無視でき、図-3に示すように開削前の主応力状態 (σ_x, σ_y) を考え、それらが有孔無限板に作用するものとして空洞周辺の応力状態を求めることのできる。

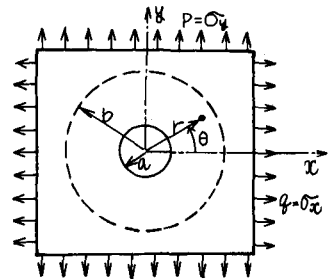


図-3

この時の応力関数法による厳密解は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P+q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{P-q}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{P+q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{P-q}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ Z_{r\theta} &= \frac{P-q}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

次に図-1のごとく地山の表面が傾斜している場合を考えると、トンネル掘削前の応力状態は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma y (\sin \varphi \tan \varphi + \lambda \cos \varphi) \\ \sigma_y &= -\gamma y \cos \varphi \\ Z_{xy} &= -\gamma y \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これらの主応力 ($\sigma_x, \sigma_y, Z_{xy}$) が図-4のごとく有孔無限板に作用するが、この中の σ_x と σ_y が作用し、 Z_{xy} が作用しないとすると、水平な場合と同様にして次のように応力が求まる。 ($\sigma_x = P, \sigma_y = q$ とおく)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P+q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{P-q}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2(\theta - \varphi) \\ \sigma_\theta &= \frac{P+q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{P-q}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2(\theta - \varphi) \\ Z_{r\theta} &= \frac{P-q}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2(\theta - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

さらに、有孔無限板が純粋せん断力 Z_{xy} を受けている場合を考えると、この応力状態は図-5のように x 軸方向に等分布引張応力 Z_{xy} を、 y 軸方向に等分布圧縮応力 Z_{xy} を受けた場合と同等である。したがってこの場合も水平の時と同様にして次のように応力が求まる。 ($S = -Z_{xy}$ とおく)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= S \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2(\theta - \varphi + \frac{\pi}{4}) \\ \sigma_\theta &= -S \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2(\theta - \varphi + \frac{\pi}{4}) \\ Z_{r\theta} &= -S \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2(\theta - \varphi + \frac{\pi}{4}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

結局、有孔無限板に $\sigma_x, \sigma_y, Z_{xy}$ が作用した時の空洞周辺の応力状態は (12) 式と (13) 式の総和によって表わされることになる。

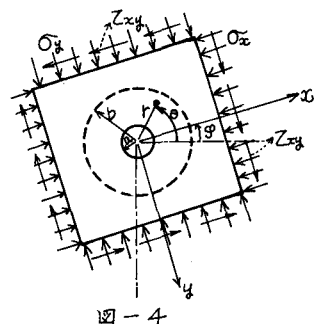


図-4

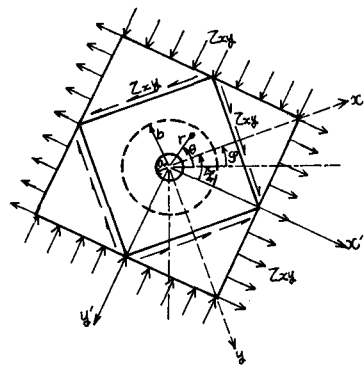


図-5

4. 表掘りトンネルの応力解析

(12), (13) 式において、 $\varphi_r \approx 0$ (すなわち、空洞の影響が及ばない程度に仮想円の半径 r が大きいものとする。) とみなした時の応力を図-1におけるトンネルモデルの半径 R_b なる円筒上に荷重として作用

させ、トンネル切羽近傍の応力解析を行うものとする。尚、この円筒上には (11) 式において、 $\gamma y = 1 \text{ t/m}^2$ とし、荷重を作用させた。また、本解析においては、図-6のごとく要素分割を行なった。(図中「命」は、その節点における $\uparrow$ 方向の変位拘束条件を示す。)

さて、トンネル切羽から r 方向にある程度離れた空洞周辺では、次第に切羽の影響は消え、最終的には円孔が無限に続く時の応力状態に近づいていくことが予想される。したがって、本論により解析された切羽から遠い位置 (図-6の断面A) での応力状態と、平面歪問題として応力関数法によって解析された有孔無限板の円孔周辺の応力状態はほとんど同じでなければならない。この両者の解析結果を図7a~図7cに比較して示したが、か

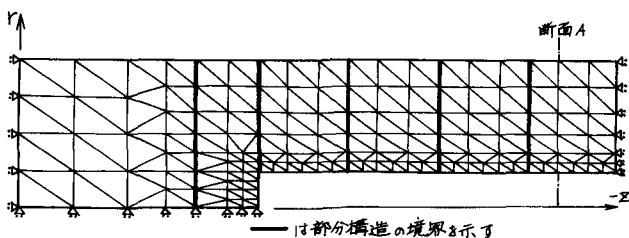


図-6 表掘りトンネルの要素分割

なり良い一致を見ることができた。

以下の応力解析においては、 $E = 1.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ で一定とし、 $\varphi = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 、 $\nu = 0.15, 0.30, 0.45$ と変化させてその状態を探った。後記する解析結果状況より、主に σ_θ に注目して、図8～図10には次のようなものを示した。

図-8・・・ θ 方向において応力最大となる角度で r - z 面をとり、その面の各応力から求めた等応力線図。

図-9・・・ r - z 面における最大応力の位置で z 方向に垂直な断面をとって表わした r 方向の応力変化。

図-10・・・ r - z 面における最大応力の位置で z 方向に垂直な断面をとって表わした θ 方向の応力変化

以上の解析結果から判断された点を列記すると次のとおりである。

- ① 傾斜角あるいはポアソン比の変化に拘らず、トンネル開削において生じる応力集中は空洞のごく周辺であり、少々離れると急速に地山の応力状態に落ちつく傾向が端的に表われている。
- ② 空洞周辺における応力集中で最も大きな値を示すのは、傾斜角あるいはポアソン比に拘らず、 σ_θ による圧縮応力であり、その位置はトンネル切羽から幾分遠ざかった空洞周辺である。
- ③ 傾斜角あるいはポアソン比が小さいと、空洞周辺における θ 方向の応力変化が顕著であり、地表面と平行な r 方向で σ_θ が大きな圧縮応力を示す一方、その垂直な方向には圧縮応力に比し小さいながらも引張応力が生じている。岩盤の引張に対する性質を考えれば、小さいと言えどもあながち無視することはできないと思われる。
- ④ 傾斜角あるいはポアソン比が大きいと、 σ_θ はトンネル断面全体で圧縮応力を示し、か

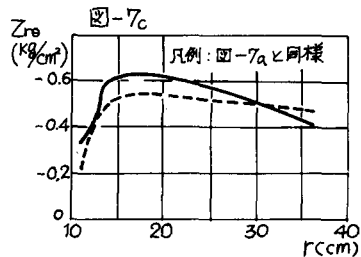
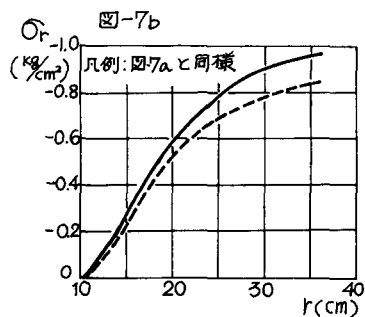
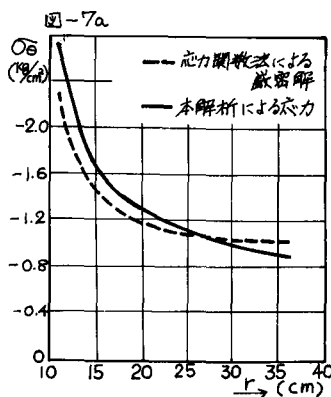


図-7 応力関数法との比較

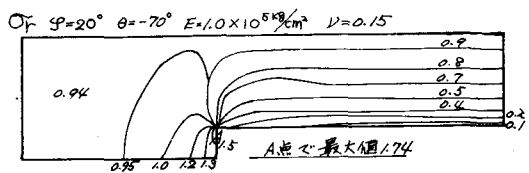
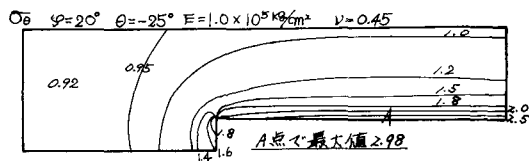
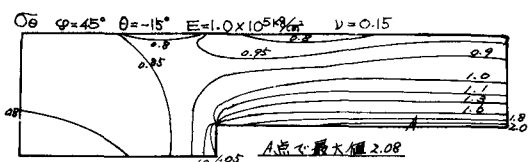
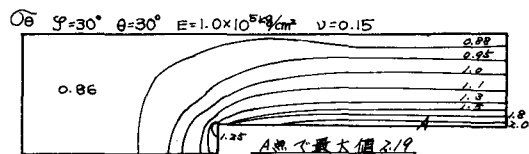
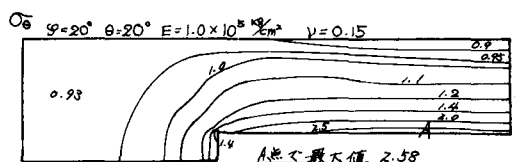


図-8 r - z 面における応力

つ θ 方向の応力変化は小さくなる。また、最大応力を示す r 方向は地表面と平行な位置からずれていく傾向にある。

- ⑤ σ_r はいずれの場合もトンネル切羽面の料において最大応力を示す状、特にポアソン比が大きくなると、空洞周辺に生じる σ_θ に劣らず大きな値を示すようになる。
- ⑥ $Z_{r\theta}$ については、いずれの場合も σ_r や σ_θ に比しその応力は非常に小さく、トンネル開削における応力集中という点ではさほど問題にならないものと思われる。

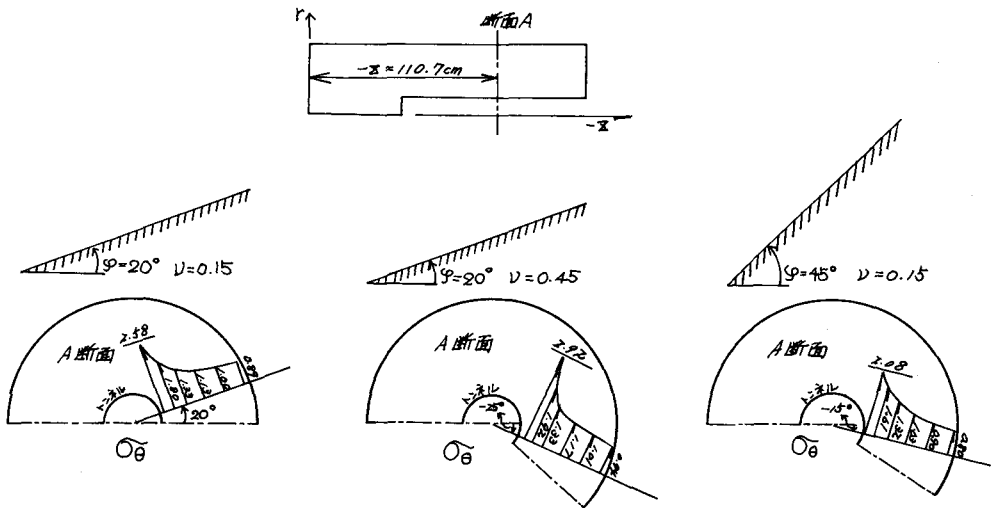


図-9

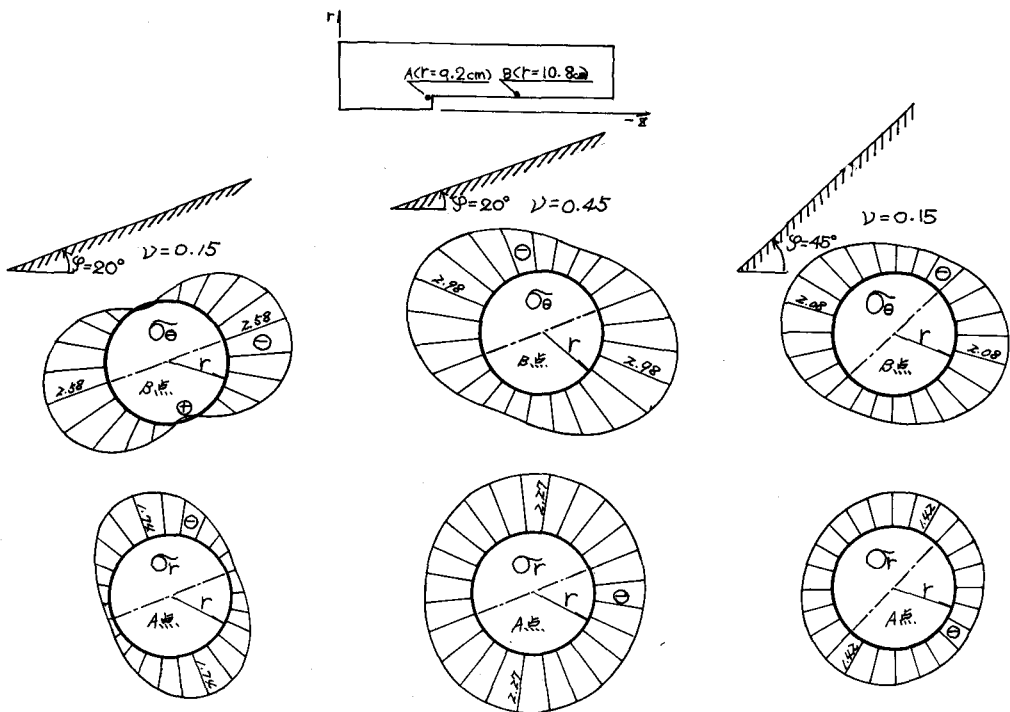


図-10

6. ライニング施工トンネルに対する一考察

ライニング施工といえば、地山を開削した後、空洞周辺の岩盤が応力集中によって破壊しないように補強するものである。實際上、ライニング施工時においてライニング部分が負担する応力はほとんど0であり、空洞周辺の応力状態は素掘りの時の状態に比べ何ら変わらないものである。ところが、素掘りの場合の応力解析結果をみるとわかるように、開削が進んで切羽から遠ざかっていくと、ライニング近傍の岩盤の応力(σ_0)が増し、ライニング部分にも応力が伝達されることになる。

いま、図-11のように、切羽 A_0 から a なる距離の点Mまでライニングを施し、さらに $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ というように開削を進行したとすると、その時にM点に伝わる応力は図-12のごとくなる。(なお、図-12においてはトンネルモデルの大きさおよび作用外力を素掘りの場合と同様にし、図-8Dにおける条件で求めた値である。)

また、節点外力の作用以前にライニングを施した、と仮定して解析すると(すなわち、ライニング部分の弾性係数を岩盤のそれよりも大きなものとして素掘りトンネルの場合と同様に解析する)この場合の応力状態は図13のごとく示される。

これらと総括して考えるならば、その定量的な把握は今後の検討を要するが、完全弾性体という仮定のもとでは、ライニングを切羽の前方一定距離(a)まで施工し、さらに岩盤の掘削を進行したならば、次第に切羽からライニングに至る空洞(A_i ~M間)周辺に応力が集中する傾向があるであろう、ということが推測される。

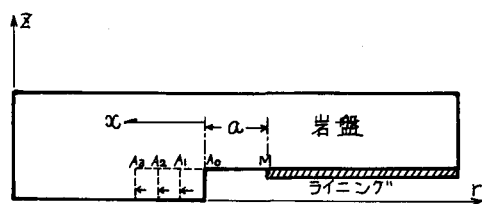


図-11 ライニング施工トンネル

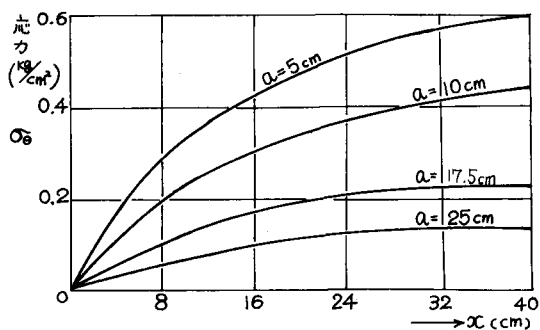


図-12 M点における応力

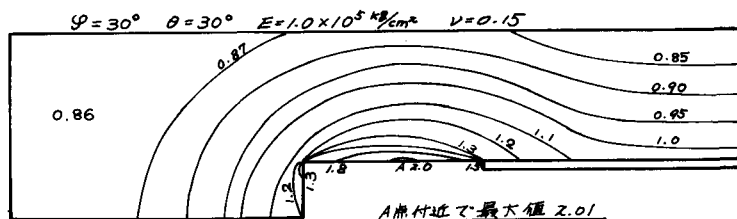


図-13 ライニング施工時の応力

参考文献

- (1) 芳村・三上・池守 有限要素法による軸対称問題の解析およびその応用について
土木学会北海道支部 昭和48年度研究発表会論文集
- (2) 芳村・三上・池守 トンネル切羽近傍における応力性状について
土木学会北海道支部 昭和49年度研究発表会論文集
- (3) 伊藤 富雄 傾斜面の下に掘ったトンネル周辺応力について
土木学会 第5回年次学術講演会論文集