

無限弾性体中の円孔を移動する部分荷重による動的応答について

北海道大学 正員 能 町 純 雄
宇蘭工業大学 ' 〇 松 岡 健 一

1. よえがき 無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するとその3次元応力解析は静的な問題に帰着する。ここでは、これの動的な問題の一つの例として部分的な移動荷重が作用するとその応答に対して若干の検討を加えた。解析の基本的な考え方は静的な場合と同様で Fourier-Hankel 変換を用いて解析するものである。

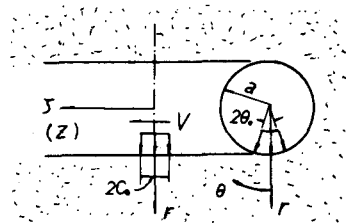


图 - 1

2. 基礎方程式の解法 円柱座標の運動方程式は、座標を円孔軸方向に z 、半径方向に r 、円周方向に θ とし、それぞれの方角の変位成分を w, u, v 、重力を σ_z 、 σ_r 、 σ_θ とし、せん断応力を τ_{rz} 、 $\tau_{r\theta}$ とすれば

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{z}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし、 ρ は密度、 t は時間である。

こゝで、移動荷重の速度は一定速度 V で、無限遠点から無限遠点まで移動するとする。いわゆる定常状態と考えれば、この問題の動的応答は、次のような座標変換を導入することにより静的の場合と同様の手法を用いて解析することができる。おぼやち

$$\zeta = z - vt \quad (2)$$

とある。また ϕ に対して偏微分は、従って

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

となるから、この関係式 (1) 式'に代入すれば

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} & \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} = \rho r^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3)$$

また、弾性振動を仮定すれば、Hookeの法則は(2)式を考慮して

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} (3\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} + (3\mu + \lambda) \frac{1}{r} & (3\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) & \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} & (3\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5)$$

(3) 设: $L_1 = R \cos \theta e^{i\pi/5}$, $L_2 = R \sin \theta e^{i\pi/5}$, $L_3 = R_3 \cos \theta e^{i\pi/5}$ 在极坐标下, $0 < r < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$

$-\infty < \zeta < \infty$ で積分変換を行なう。ただし円孔の半径を a とし, $m=0, 1, \dots$, n は実数とする。このとき Hooke の法則 (4), (5) を考慮しながら部分積分を行ない, えらわれ式の第1式と第2式を辺を加え

$$A_{mnr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{u \cos m\theta + v \sin m\theta\} e^{i n \zeta} d\theta d\zeta, \quad B_{mnr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{u \cos m\theta - v \sin m\theta\} e^{i n \zeta} d\theta d\zeta \quad (6)$$

とおき, $R = r H_{m+1}(\zeta r) = r \{J_{m+1}(\zeta r) Y_m(\zeta a) - J_m(\zeta a) Y_{m+1}(\zeta r)\}$, ζ は実数

として積分を続ける。また第1式と第2式を辺々減じ, (6) 式の関係を用い

$$R = r H_{m-1}(\zeta r) = r \{J_{m-1}(\zeta r) Y_m(\zeta a) - J_m(\zeta a) Y_{m-1}(\zeta r)\},$$

として同様の積分を行なう。第3式では, (6) 式の関係を代入し

$$R = r H_m(\zeta r) = r \{J_m(\zeta r) Y_m(\zeta a) - J_m(\zeta a) Y_m(\zeta r)\},$$

として積分変換を完成させる。ただし, J_m, Y_m は, m 次の第1種および第2種の Bessel 関数である。

以上により各変位成分の Fourier-Hankel 変換値を含む3元連立方程式がえられ, これを解くことにより各変位成分の Fourier-Hankel 変換値が求まる。

3. 変位および応力成分 各変位成分は, Σ でえられ各変位成分の Fourier-Hankel 変換値を逆変換することにより, 円孔面の変位および応力の Fourier 変換値を積分定数として含む形で求められる。

$$u = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} (A_{mnr} + B_{mnr}) \cos m\theta \cdot e^{-i n \zeta} d\zeta, \quad (7)$$

$$v = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{mnr} - B_{mnr}) \sin m\theta \cdot e^{-i n \zeta} d\zeta, \quad (8)$$

$$w = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} W_{mnr} \cos m\theta \cdot e^{-i n \zeta} d\zeta, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{mnr} = & \frac{1}{2\mu n a} \chi_{mp}(n r) \{ \alpha_{mna} + 2\mu(m+1) A_{mna} + 2\mu(m-1) B_{mna} + \mu n^2 E_{mna} \} \\ & + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu + \lambda} - \frac{\mu}{\rho V^2} \right) \frac{1}{n_p} \chi_{mp}(n_p r) + \frac{\mu}{\rho V^2} \frac{1}{n a} \chi_{mp}(n a) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mna} + (m+1) A_{mna} - (m-1) B_{mna} \right. \\ & \left. - n^2 E_{mna} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_{mnr} = & -\frac{1}{2\mu n a} \chi_{me}(n r) \{ \alpha_{mna} + 2\mu(m+1) A_{mna} + 2\mu(m-1) B_{mna} - \mu n^2 E_{mna} \} \\ & + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu + \lambda} - \frac{\mu}{\rho V^2} \right) \frac{1}{n_p} \chi_{me}(n_p r) + \frac{\mu}{\rho V^2} \frac{1}{n a} \chi_{me}(n a) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mna} + (m+1) A_{mna} \right. \\ & \left. - (m-1) B_{mna} - n^2 E_{mna} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$W_{mnr} = G_m(n r) E_{mna} + \frac{2\mu n}{\rho V^2 n} \{ G_m(n_p r) - G_m(n r) \} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mna} + (m+1) A_{mna} - (m-1) B_{mna} - n^2 E_{mna} \right\}, \quad (12)$$

ここで, μ, λ は Lamé の弾性定数, $C_m = \frac{1}{2}$ for $m=0$, $C_m = 1$ for $m \neq 0$ 。

$$G_m(n r) = \frac{K_m(n r)}{K_m(n a)}, \quad \chi_{mp}(n r) = -\frac{K_{m+1}(n r)}{K_m(n a)}, \quad \chi_{me}(n r) = -\frac{K_{m-1}(n r)}{K_m(n a)},$$

$K_m(n r)$ は m 次の第2種変形 Bessel 関数であり, $n_p = n(1 - \rho V^2 / 2\mu + \lambda)$, $n_a = n(1 - \rho V^2 / \mu)$, また, 式中の, $\alpha_{mna}, \beta_{mna}, A_{mna}, B_{mna}, E_{mna}$ は円孔面の応力および変位の Fourier 変換値で,

$$\alpha_{mna} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta}|_{r=a} \sin m\theta \cdot e^{i n \zeta} d\theta d\zeta, \quad \beta_{mna} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_r|_{r=a} \cos m\theta \cdot e^{i n \zeta} d\theta d\zeta,$$

$$A_{mna} = A_{mnr}|_{r=a}/a, \quad B_{mna} = B_{mnr}|_{r=a}/a, \quad E_{mna} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} w|_{r=a} \cos m\theta \cdot e^{i n \zeta} d\theta d\zeta,$$

これらの定数は, 境界条件を満足するように決定する。

次に各応力成分は, (7) ~ (12) 式を Hooke の法則 (4), (5) 式に代入し

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} A_{mnr} + \frac{\partial}{\partial r} B_{mnr} \right) + \lambda \cdot \Delta \right\} e^{-c'n\tau} \cos m\theta \, dn, \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\mu \left(\frac{m+1}{r} A_{mnr} - \frac{m-1}{r} B_{mnr} \right) + \lambda \cdot \Delta \right\} e^{-c'n\tau} \sin m\theta \, dn, \quad (14)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2\mu c'n \, W_{mnr} + \lambda \cdot \Delta \right\} e^{-c'n\tau} \cos m\theta \, dn, \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} A_{mnr} - \frac{\partial}{\partial r} B_{mnr} - \frac{m+1}{r} A_{mnr} - \frac{m-1}{r} B_{mnr} \right\} e^{-c'n\tau} \sin m\theta \, dn, \quad (16)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left\{ -\frac{m}{r} W_{mnr} - c'n (A_{mnr} - B_{mnr}) \right\} e^{-c'n\tau} \sin m\theta \, dn, \quad (17)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} W_{mnr} - c'n (A_{mnr} + B_{mnr}) \right\} e^{-c'n\tau} \cos m\theta \, dn, \quad (18)$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} G_m(\kappa_p r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mna} + (m+1) A_{mna} - (m-1) B_{mna} - c'n E_{mna} \right\}, \quad (19)$$

$$\text{また, } \frac{\partial}{\partial r} \chi_{mp}(\kappa r) = \kappa G_m(\kappa r) - \frac{m+1}{r} \chi_{mp}(\kappa r), \quad \frac{\partial}{\partial r} \chi_{mz}(\kappa r) = \kappa G_m(\kappa r) + \frac{m-1}{r} \chi_{mz}(\kappa r),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} G_m(\kappa r) = \kappa \chi_{mp}(\kappa r) + \frac{m}{r} G_m(\kappa r),$$

4. 境界条件 円孔に移動荷重が作用するときの境界条件は、円孔面で

$$\text{i) } \tau_{r\theta} = 0, \quad \therefore \alpha_{mna} = 0, \quad (20)$$

$$\text{ii) } \sigma_r = p(\theta, z), \quad \therefore \beta_{mna} = \int_0^{2\pi} p \cos m\theta e^{c'nz} d\theta \int_0^\infty e^{-c'n\tau} d\tau, \quad (21)$$

$$\text{iii) } \tau_{rz} = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{m\kappa}{\kappa^2 a} \left\{ 2\mu(m+1) A_{mna} + 2\mu(m-1) B_{mna} \right\} \\ & + 2\mu \left[-\left\{ \frac{\mu}{2\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\rho v^2} \left(\frac{\kappa}{\kappa_e} + \frac{\kappa_p}{\kappa} \right) \right\} \chi_{mp}(\kappa_p a) \right. \\ & + \left. \frac{m}{\kappa_p a} \right] - \frac{\kappa}{\rho v^2} \left(\frac{\kappa}{\kappa_e} + \frac{\kappa_e}{\kappa} \right) \left\{ \chi_{mp}(\kappa_e a) + \frac{m}{\kappa_e a} \right\} \\ & \times \left[\frac{1}{2\mu} \beta_{mna} + (m+1) A_{mna} - (m-1) B_{mna} - c'n E_{mna} \right] \\ & - c'\mu \kappa \left(\frac{m}{\kappa_e} + \frac{\kappa_e}{\kappa} \right) \left\{ \chi_{mp}(\kappa_e a) + \frac{m}{\kappa_e a} \right\} E_{mna} = 0, \quad (22') \end{aligned}$$

となるが、さらに A_{mnr} , B_{mnr} については式の仮定から

$$A_{mna} = A_{mnr}|_{r=a/a}, \quad B_{mna} = B_{mnr}|_{r=a/a}, \quad (23)$$

を満足しなければならない。

以上 (22') 式および (23) の二つの式から、未知定数 A_{mna} , B_{mna} , E_{mna} を決定することができる。

5. 数値計算 まず軸対称荷重で、 $\mu = \lambda = 0.4E$ (E : 弾性係数) に対して荷重分布巾 C_0 を種々変化させた場合の荷重速度と、円孔周囲の変位および応力の関係を求めた。

図-2, 3 には、変位 u , w について荷重の速度比 (せん断波の速度 V_s との比) と各変位の応答倍率との関係を示した。変位の絶対値は、半径方向変位 u の方が大きく $V^2/V_s^2 = 0.8$ でも $u/w \div 1.3$ であるが、各速度に対する応答倍率では w の方が大きく $V^2/V_s^2 = 0.8$ では w は u の約3倍となっている。また荷重巾と応答倍率の関係では

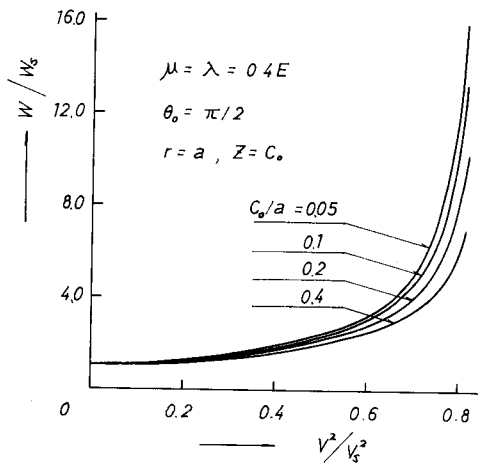
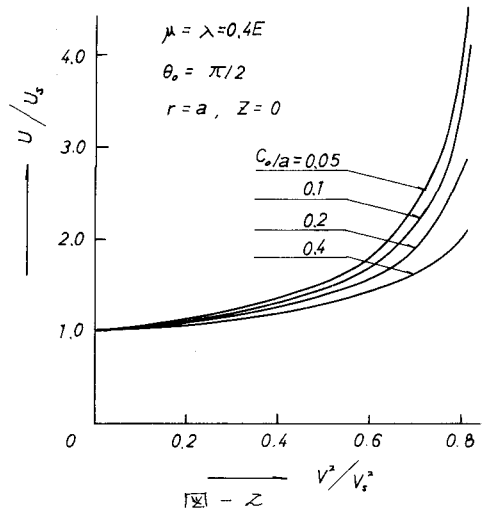


図-3

荷重巾が小さくなるほど倍率は大きくなっており、 $V^2/V_s^2 = 0.8$ では $C_0 = 0.05$ のときは $C_0 = 0.4a$ のときの約2倍となっている。図-4.5 には表面変位 u, w のZ方向の分布を $C_0 = 0.4a$ のものについて、各荷重速度ごとに示したものであるが、いずれも荷重速度が速くなるに従って、変位が荷重位置に集中する傾向がみられる。図-6 は、 $C_0 = 0.4a$ で一定にし、ポアソン比を変化させた場合の u の応答倍率を示したものであるが、ポアソン比の小さいもの程わずかながら、大きな値を示している。

次に非軸対称荷重の場合であるが、計算は $\mu = \lambda = 0.4E$ で $C_0/a = \theta_0 = 0.4$ のもののみである。図-7 にはこの場合の u, w の最大値の応答倍率を示した。軸対称の場合と比較して多少の差はないが u が軸対称に比較してわずかに小さくなっている。図-8 は、 $r = a, \theta = 0$ における変位 u のZ方向の分布を示したものである。これも軸対称の場合と比較すると、ほとんど同様の傾向を示し、わずかに小さい値を示すようである。

以上の計算は、 n に対しては π を一区間とし、これを、Gauss の8分点法で 20π または 40π まで数値積分し、非軸対称のものは n に対して10項近接法を用いたものである。また計算は主に北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 で行ない、一部を室蘭工業大学情報処理教育センターの FACOM 230-28 で行なった。

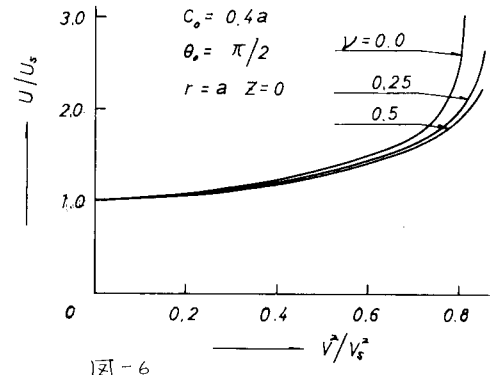


図-6

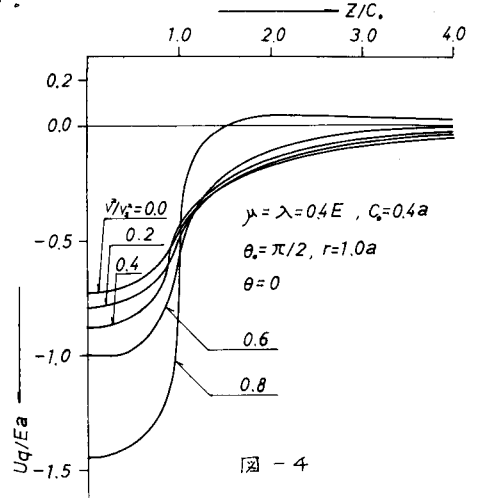


図-4

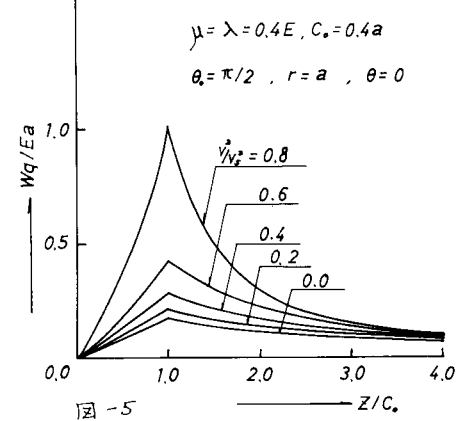


図-5

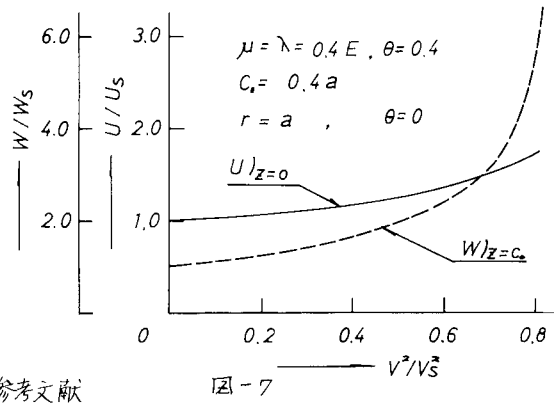


図-7

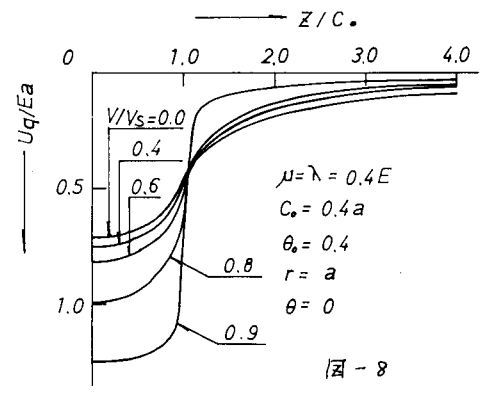


図-8

参考文献

- 1) 松岡・能町: 無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するときの三次元応力解析, 土木学会論文報告集 第229号