

弾性媒体内にある液体で満たされた円筒の波動伝播について

北海道大学工学部 正員 能町純雄
室蘭工業大学 正員 松岡健一
室蘭工業大学 学生員 〇坂下正幸

1. まえがき

本論は、圧縮性の液体で満たされた円筒が弾性媒体内に置かれた場合の波動伝播についての研究であるが、これは、地中に埋め込まれた液体を含むパイプの動的な挙動を検討するための基礎的な資料になるものと思われる。解析結果は、液体が満たされた円筒の直径と波長との比 (L/D , D/L), および弾性波の位相速度と液体中の伝わる音波の速度との比 (V/C_t) の分散曲線を示し、液体と円筒との密度の比 (ρ_f/ρ), 弾性媒体と円筒との弾性定数の比 (μ_1/μ_2), および円筒の肉厚と内径との比 (h/a) などの変化に対する、その分散曲線の変化を検討するものである。なお、ポアソン比は、ここでは、0.25 の値のみを用いた。弾性媒体内に液体で満たされた円筒のある場合の計算が M. A. Biot によってなされて¹⁾いるが、本論でも、これと同様の計算を行って、Biot と同一の結果を得た。

2. 弾性体に対する運動方程式の解

半径方向に r 軸、接線方向に θ 軸、円柱軸方向に z 軸をとった円柱座標系における弾性体の運動方程式は、 σ と直応力度、 τ とせん断応力度として、次の様に表わされる。なお、 u, v, w は、それぞれ、 r, θ, z 方向の分変位である。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

対象とする振動は調和振動と仮定すれば、 u, v, w は、次の様に表わすことができる。

$$u(r, \theta, z, t) = \tilde{u}(r) \cdot \cos m\theta \cdot \sin (pt - Nz) \quad (4)$$

$$v(r, \theta, z, t) = \tilde{v}(r) \cdot \sin m\theta \cdot \sin (pt - Nz) \quad (5)$$

$$w(r, \theta, z, t) = \tilde{w}(r) \cdot \cos m\theta \cdot \sin (pt - Nz) \quad (6)$$

Hooke の法則より応力も同様に仮定され、これらの変位、応力を (1), (2), (3) 式に代入し、運動方程式を r 方向のみの未知数にすると、

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dr} + \frac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta}{r} + \frac{m}{r} \tilde{\tau}_{r\theta} + N \tilde{\tau}_{rz} = -\rho p^2 \tilde{u} \quad (7)$$

$$\frac{d\tilde{\tau}_{r\theta}}{dr} + 2 \frac{\tilde{\tau}_{r\theta}}{r} - \frac{m}{r} \tilde{\sigma}_\theta + N \tilde{\tau}_{z\theta} = -\rho p^2 \tilde{v} \quad (8)$$

$$\frac{d\tilde{\tau}_{rz}}{dr} + \frac{\tilde{\tau}_{rz}}{r} + \frac{m}{r} \tilde{\tau}_{\theta z} - N \tilde{\sigma}_z = -\rho p^2 \tilde{w} \quad (9)$$

(7), (8), (9) 式に有限 Hankel 変換を施し、その逆変換によって解を求める。即ち、 a, b とそれぞれ円筒

の内径, 外径と(7),

$$\tilde{U} = A_{mr} + B_{mr} \quad (10), \quad \tilde{V} = A_{mr} - B_{mr} \quad (11)$$

と置き,

$$\int_a^b \{ (7) + (8) \} r H_{m+1}(\tilde{r}, r) dr, \int_a^b \{ (7) - (8) \} r H_{m-1}(\tilde{r}, r) dr, \int_a^b (9) \cdot r H_m(\tilde{r}, r) dr$$

$$\text{右に}, H_{\frac{1}{2}}(\tilde{r}, r) = J_{\frac{1}{2}}(\tilde{r}, r) Y_m(\tilde{r}, a) - J_m(\tilde{r}, a) Y_{\frac{1}{2}}(\tilde{r}, r)$$

J, Y : 第1種, 第2種 Bessel 関数

$\tilde{r}$ は $H_m(\tilde{r}, r) = 0$ の根として11項に並べたもの

と計算を行なうことにすると, 変位成分の有限 Hankel 変換係数 $H_{m+1}[A_{mr}], H_{m-1}[B_{mr}], H_m[\tilde{w}]$ を含む三元連立一次方程式が解られる。これを解き, 得られた変換値(係数)を変換することにより, (7), (8), (9)の解は, 円筒のr方向の境界における物理量を含んだ形で与えられる。

結果として, 解は次の様になる。

$$A_{mr} = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{2\mu} \frac{1}{N_s} \chi_{mp}^{(k)}(N_s r) \alpha_m^{(k)} + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu+\lambda} - \frac{\mu N^2}{p p^2} \right) \frac{1}{N_p} \chi_{mp}^{(k)}(N_p r) + \frac{\mu N^2}{p p^2} \frac{1}{N_s} \chi_{mp}^{(k)}(N_s r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m^{(k)} + \frac{m+1}{a_k} A_m^{(k)} - \frac{m-1}{a_k} B_m^{(k)} + N E_m^{(k)} \right\} + \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(N_s r) \left\{ \frac{m+1}{a_k} A_m^{(k)} + \frac{m-1}{a_k} B_m^{(k)} - \frac{1}{2} N E_m^{(k)} \right\} \right] \quad (12)$$

$$B_{mr} = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(N_s r) \alpha_m^{(k)} + \left\{ \left(\frac{\mu}{2\mu+\lambda} - \frac{\mu N^2}{p p^2} \right) \frac{1}{N_p} \chi_{ms}^{(k)}(N_p r) + \frac{\mu N^2}{p p^2} \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(N_s r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m^{(k)} + \frac{m+1}{a_k} A_m^{(k)} - \frac{m-1}{a_k} B_m^{(k)} + N E_m^{(k)} \right\} - \frac{1}{N_s} \chi_{ms}^{(k)}(N_s r) \left\{ \frac{m+1}{a_k} A_m^{(k)} + \frac{m-1}{a_k} B_m^{(k)} + \frac{1}{2} N E_m^{(k)} \right\} \right] \quad (13)$$

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^2 \left[2 \frac{\mu N^2}{p p^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_p r) - G_m^{(k)}(N_s r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_m^{(k)} + \frac{m+1}{a_k} A_m^{(k)} - \frac{m-1}{a_k} B_m^{(k)} + N E_m^{(k)} \right\} + G_m^{(k)}(N_s r) E_m^{(k)} \right] \quad (14)$$

上式中 μ, λ は Lamé の定数, $N = 2\pi/L$, p は密度, $m = 0, 1, \dots$

$$N_s^2 = N^2 - \frac{p p^2}{\mu} = N^2 \left(1 - \frac{p p^2}{\mu N^2} \right), \quad N_p^2 = N^2 - \frac{p p^2}{2\mu+\lambda} = N^2 \left(1 - \frac{\mu}{2\mu+\lambda} \frac{p p^2}{\mu N^2} \right)$$

$$G_m^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}$$

$$R_{i,j}(Nr) = I_i(Nr) K_j(Na_{k+1}) - (-1)^{i+j} I_j(Na_{k+1}) K_i(Nr); \quad a_0 = a, a_1 = b, a_2 = a$$

I, K : 第1種, 第2種変形 Bessel 関数

$$\alpha_m^{(k)} = (\tilde{r}_0)_{r=a_k}, \quad \beta_m^{(k)} = (\tilde{r}_r)_{r=a_k}, \quad A_m^{(k)} = A_{mr}|_{r=a_k}, \quad B_m^{(k)} = B_{mr}|_{r=a_k}, \quad E_m^{(k)} = \tilde{w}|_{r=a_k}$$

上式は無限に多くの円筒に於ける解であるが, 弾性媒体については, $b \rightarrow \infty$ とすることに より, 上の式よりのみを用いることができ, この場合, $G_m, \chi_{mp}, \chi_{ms}$ は K のみにより表わされる。応力成分は Hooke の法則を用いて, (4) ~ (6), (10) ~ (14) より与えられる。

3. 圧縮性流体における波動方程式の解

中圧縮性流体の変位ポテンシャルとすれば, 中は円柱座標系における次の波動方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (15)$$

c_f : 流体中を伝わる音波の速度 ($= \sqrt{K/\rho_f}$; K : 体積弾性率)

z 方向に伝わる波動を, z と同時に, 回転運動を仮定すれば,

$$\phi(r, \theta, z, t) = \tilde{\phi}(r) \cdot \cos m\theta \sin (cpt - Nz) \quad (16)$$

(16)式を(15)式に代入して整理すると,

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dr^2} + \frac{d\tilde{\phi}}{r dr} - [N_f^2 + \frac{m}{r}] \tilde{\phi} = 0 \quad (17)$$

$$r = r' L, \quad N_f = N(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta = \frac{r}{N\zeta_f} = \frac{r}{r_f}$$

流体が円柱状に存在する場合の(17)式の解は、有限 Hankel 変換を用いて、次の様に求む。

$$\tilde{\phi}(r) = G_m^f(N_f r) \cdot \phi_a \quad (18)$$

ただし、 $\phi_a = \tilde{\phi}(r_a)$, a : 円柱状流体の半径

$$G_m^f(N_f r) = \frac{J_m(N_f r)}{J_m(N_f a)}, \quad \zeta > 1 \text{ の場合は } N_f = iN_f' < i, \quad G_m^f(N_f r) = \frac{J_m(N_f r)}{J_m(N_f a)}$$

(18)式を(16)式に代入すると,

$$\phi(r, \theta, z, t) = G_m^f(N_f r) \cdot \phi_a \cdot \cos m\theta \sin (cpt - Nz) \quad (19)$$

(19)式より、流体の r 方向の変位 u_r 、および圧力 p_f は次の様に求む。

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left[N_f \lambda_{mp}^f(N_f r) + \frac{m}{r} G_m^f(N_f r) \right] \cdot \phi_a \cdot \cos m\theta \sin (cpt - Nz) \quad (20)$$

$$r = r' L, \quad \lambda_{mp}^f(N_f r) = \frac{I_{m+1}(N_f r)}{I_m(N_f a)}, \quad \zeta > 1 \text{ の場合は } N_f = iN_f' < i, \quad \lambda_{mp}^f(N_f r) = i \frac{J_{m+1}(N_f r)}{J_m(N_f a)}$$

$$p_f = -\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \rho p^2 G_m^f(N_f r) \cdot \phi_a \cdot \cos m\theta \sin (cpt - Nz) \quad (21)$$

4. 境界条件

Fig. 1 の様に、無限弾性媒体、弾性円筒、流体が存在している。

とする。

I. $r = 0$ の境界条件 この場合は、まず、(12)、(13)式より、

$$A_{m1} r_{r=0} = A_{m1}^{(2)} (= A_{m1}^{(2)}) \quad (22), \quad B_{m1} r_{r=0} = B_{m1}^{(2)} (= B_{m1}^{(2)}) \quad (23)$$

$$A_{m2} r_{r=0} = A_{m2}^{(1)} \quad (24), \quad B_{m2} r_{r=0} = B_{m2}^{(1)} \quad (25)$$

が成立しているから、次に、接触面にせん断力が作用する場合(i)

と、(ii) 場合(ii) とで、それぞれ次の様に求む。

$$i) a. u_{r1} r_{r=a} = u_{r2} r_{r=a}, \quad v_{r1} r_{r=a} = v_{r2} r_{r=a}, \quad w_{r1} r_{r=a} = w_{r2} r_{r=a}$$

$$\therefore A_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(1)} = A_{m1}^{(1)}, \quad B_{m1}^{(2)} = B_{m2}^{(1)} = B_{m1}^{(1)}, \quad E_{m1}^{(2)} = E_{m2}^{(1)} = E_{m1}^{(1)}$$

$$b. \sigma_{r1} r_{r=a} = \sigma_{r2} r_{r=a}, \quad \tau_{\theta r1} r_{r=a} = \tau_{\theta r2} r_{r=a}$$

$$\therefore \beta_{m1}^{(2)} = \beta_{m2}^{(1)} = \beta_{m1}^{(1)}, \quad \alpha_{m1}^{(2)} = \alpha_{m2}^{(1)} = \alpha_{m1}^{(1)}$$

$$c. \tau_{\theta \theta 1} r_{r=a} = \tau_{\theta \theta 2} r_{r=a} \quad (26)$$

$$ii) a. u_{r1} r_{r=a} = u_{r2} r_{r=a} \quad \therefore A_{m1}^{(2)} + B_{m1}^{(2)} = A_{m2}^{(2)} + B_{m2}^{(2)} \quad (27)$$

$$b. \sigma_{r1} r_{r=a} = \sigma_{r2} r_{r=a} \quad \therefore \beta_{m1}^{(2)} = \beta_{m2}^{(1)} = \beta_{m1}^{(1)}$$

$$c. \tau_{\theta r1} r_{r=a} = \tau_{\theta r2} r_{r=a} = 0 \quad \therefore \alpha_{m1}^{(2)} = \alpha_{m2}^{(1)} = 0$$

$$d. \tau_{\theta \theta 1} r_{r=a} = 0 \quad (28), \quad \tau_{\theta \theta 2} r_{r=a} = 0 \quad (29)$$

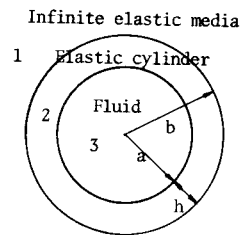


Fig.1

Ⅱ. $r=a$ での境界条件 Ⅱは弾性体と流体との接触面であるが、弾性体の方について、Ⅰの場合と同じく

$$A_{r2}|_{r=a} = A_{r2}^{(2)} = A_{r2a} \quad (30), \quad B_{r2}|_{r=a} = B_{r2}^{(2)} = B_{r2a} \quad (31)$$

が成立しなければならないが、また、流体にはせん断力は存在しないと考え、 $\tau_{r2}|_{r=a} = 0 \quad (32)$

また、弾性体と流体との互いの r 方向の変位、および応力（流体では圧力）が等しくなければならないので、

$$u_2|_{r=a} = u_1|_{r=a} \quad \therefore A_{r2a} + B_{r2a} = \tilde{u}_1|_{r=a} \quad (33)$$

$$\text{また、} \tilde{u}_1|_{r=a} = \left[N_1 \chi_{1p}^+ (N_1 a) + \frac{\mu}{r} \tilde{G}_m^+ (N_1 a) \right] \cdot \phi_a$$

$$\sigma_{r2}|_{r=a} = -p_1|_{r=a} \quad \therefore (\beta_{r2} = -\tilde{p}_1)|_{r=a} \quad (34)$$

$$\text{また、} \tilde{p}_1|_{r=a} = P P^2 \tilde{G}_m^+ (N_1 a) \cdot \phi_a$$

以上、 $r=a$ の境界でせん断力が作用する場合の境界の未知数は、 u_{1a} , β_{1a} , A_{1a} , B_{1a} , A_{r2a} , B_{r2a} , E_{r2a} , β_{r2a} , ϕ_a の 10 があり、これらは、(22) ~ (25), (26), (30) ~ (34) の 10 式より決定でき、また、せん断力が作用しない場合は、 A_{1a} , B_{1a} , E_{r2a} , β_{r2a} , A_{r2a} , B_{r2a} , E_{r2a} , A_{1a} , B_{1a} , E_{r2a} , β_{r2a} , ϕ_a の 12 の未知数があり、これらは、(22) ~ (25), (27) ~ (29), (30) ~ (34) の 12 式より決定できる。弾性波の位相速度は、上記の境界条件式の係数行列の行列式を零とするときの $\zeta (= V / (c_f))$ の値を求めることにより与えられる。

流体の接触面に關しては、極限の状態として、周囲の物体が剛体、即ち、変位しない場合と、無限に柔性、即ち、円柱状の流体が自由境界に存在する場合とが考えられ、軸対称の場合には、それぞれ、(20), (21) 式より、

$$u_1|_{r=a} = 0 \quad \therefore J_1(N_1 a) = 0 \quad (35)$$

$$p_1|_{r=a} = 0 \quad \therefore J_0(N_1 a) = 0 \quad (36)$$

の場合の ζ を求めなければならない。

5. 数値計算例

数値計算例としては、ここでは、軸対称の場合のみを取扱っている。他の条件として、弾性体（弾性円筒）がある場合は、その円筒中で伝わるせん断波の速度と、流体中に伝わる音波の速度との比 (V_s / c_f) を 1.5 とし、また、弾性媒体がある場合は、それと円筒との接触面について、せん断力があることを想定し、ポアソン比を 0.25 としている。

Fig. 2 は、M. A. Bolot による報告に基づいて計算し、本論文の方法により確認したものであるが、流体と弾性体との密度の比 (ρ_f / ρ) として、1.0, 0.4 の値の場合をとり、それらはモードごとに示し、一部 0.0/228 の値の場合を示してある。図中実線で示し、 ∞ と記してあるのは (35) 式より与えられる剛体物体中に流体がある場合の分散曲線であり、0 と記してあるのは (36) 式より与えられる流体が自由境界に存在している場合の分散曲線である。また、R と記してあるのは、円孔中に何もないうち、即ち、弾性媒体中に円孔状の穴があり、波長が零に近づけば、これは Rayleigh 波に等しくなる。

左側の Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4 は同一の円厚板 $(b/a = 0.1)$ で、Fig. 2 は円筒のみの場合、Fig. 3, Fig. 4 は、それぞれ、円筒の弾性定数に対する外側の弾性定数の比が 0.01, 0.1 の場合である。3 図とも、流体と円

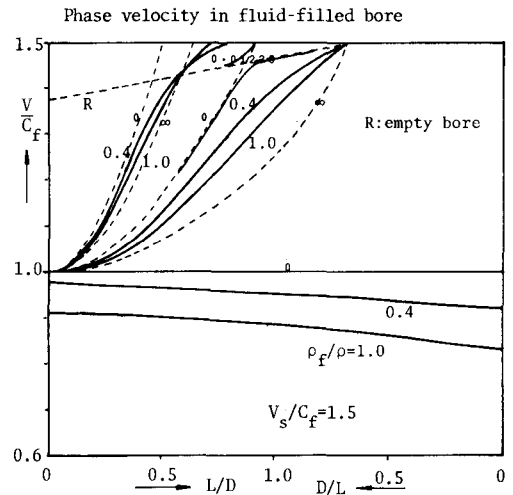


Fig. 2

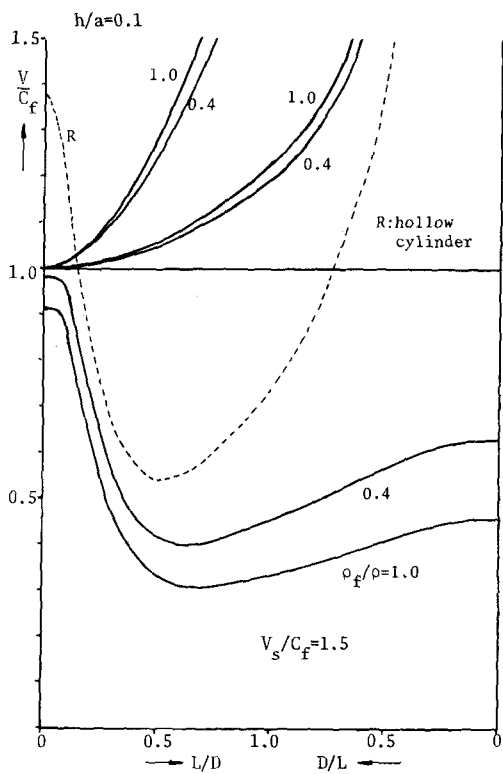


Fig.3

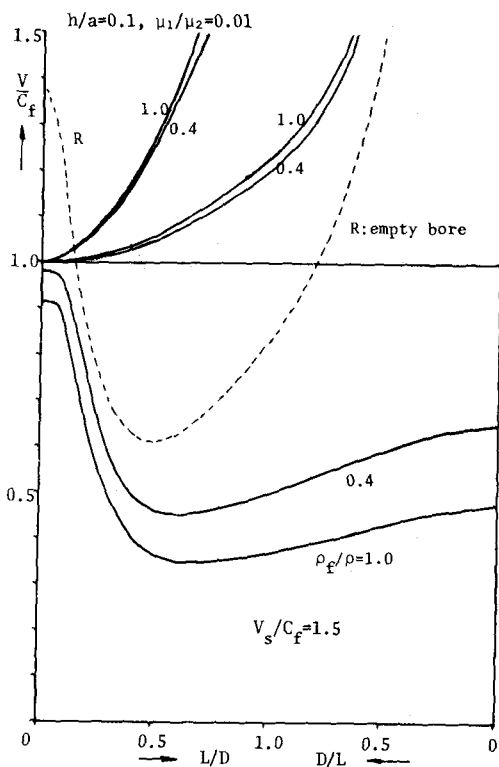


Fig.4

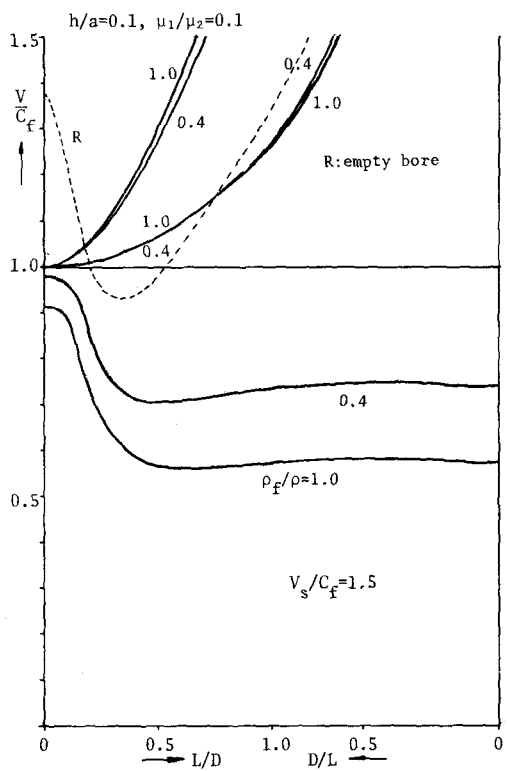


Fig.5

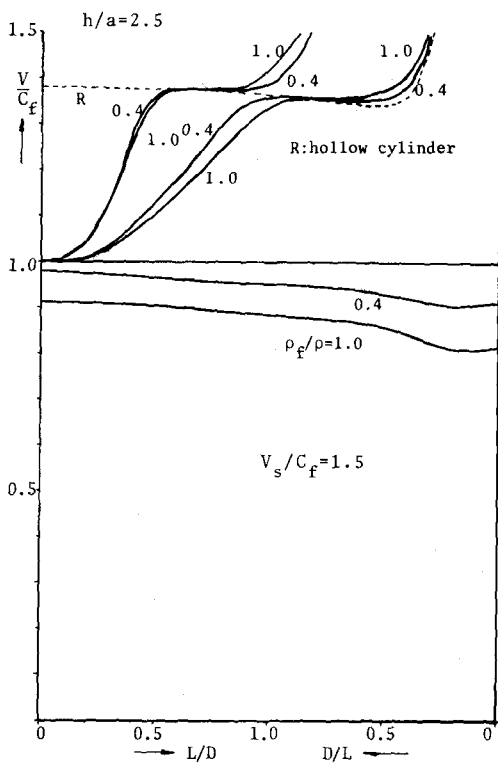


Fig.6

筒との密度の比は 1.0, 0.4 など, 3 モードまで示してある。全体として, 外側の弾性媒体の弾性定数が大きくなるにつれて, Fig. 2 の状態に近づいて行くことがわかる。1 モードに関しては, Fig. 3 ~ Fig. 5 となるにつれて, 位相速度は必ずしも大きくなり, 3 の最小値が波長より小さい箇所へ移動して行く様である。また, 2 モード以上については, 実線は R を示した中に何が入っているか。円筒の場合の分散曲線に, 実線を示した流体で満たされた円筒の場合の分散曲線とが交わった所で, ρ_1/ρ の値による大小関係が逆転し, ρ_1/ρ より高い値の方が, R の線からより離れる傾向にあるのが分る。Fig. 6 は外側に弾性媒体がなく, 円筒のみの場合であるが, 肉厚が相当大きいので, 波長が短い所では, Fig. 2 と比較的近い曲線が得られる。波長が長くなり, R の線に近づくとき, 徐々に漸近する部分があることが明瞭に示されている。波長が零に近い所では, Fig. 2 ~ Fig. 5 の 5 図は, すべて, 同じ値から始まる。

円筒の中に流体を含む場合の波動伝播に関する研究は, ミエル理論を用いて, T. C. Lin と G. W. Morgan によってなされているが, この論文²⁾によると, 1 モードは本質的には流体中の音波の波動であるが, この位相速度は, 円筒の弾性によって多少減少せられていくものであり, また, 2 モードは本質的には円筒を伝わる縦波の波動であるが, この位相速度は, 流体の存在による系全体に付加せられる剛性のために, 中空円筒の場合より大きくなる²⁾と説明されている。

6. 結 び

以上圧縮性の流体が弾性円筒内に満たされ, 外側に弾性媒体が存在している場合の波動伝播に関する解析解と, 軸対称の場合の数値計算例とをそれぞれ示した。先に発表した弾性媒体内にある円筒の伝わる弾性波についての研究³⁾との比較によつて, ここでは, 流体の存在による弾性波の伝播に対する影響を調べた。本論と同様の方法を用いて, 流体が外側に存在する場合, または, 円筒状に存在する場合等も解析可能であると思われる。

なお, 数値計算に際しては, 北海道大学大型計算機 FACOM 230-75, 宝蘭工業大学 FACOM 230-28 を使用した。

参考文献

- 1) M. A. Biot: Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid, J. Appl. Phys. vol. 23, pp. 997-1005, 1952.
- 2) T. C. Lin and G. W. Morgan: Wave Propagation through Fluid Contained in a Cylindrical, Elastic Shell, J. Acoust. Soc. Amer. vol. 28, pp. 1165-1176, 1956
- 3) W. M. Ewing, W. S. Tardetky, F. Press: Elastic Waves in Layered Media, chap. 6. Plates and Cylinder pp. 281-327, McGraw-Hill, 1957.
- 4) I. Minsky and G. Hermann: Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells, J. Acoust. Soc. Amer. vol. 29, pp. 1116-1123, 1957.
- 5) D. C. Gazis: Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinder I. II. J. Acoust. Soc. Amer. vol. 31, pp. 568-578, 1957.
- 6) K. G. Matsuoka, S. G. Nomachi: On a 3-Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body by Means of Fourier-Hankel Transforms, Proceeding of the 22nd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1972.
- 7) 熊野, 松岡: 弾性媒体内に Cylindrical Rod を有するときの弾性波について, 第 24 回応力学会講演要録集, 1974
- 8) 熊野, 松岡, 坂下: 弾性媒体内にある厚肉円筒を伝わる弾性波について, 第 30 回応力学会講演要録集, 第 1 部, 1975.