矩形分布荷重を受ける直交異方性無限帯状板の曲げについて

北海道大学工学部　正員　○芳村　仁
北海道大学工学部　正員　三上　隆

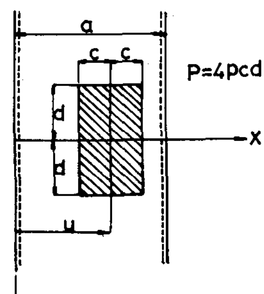
1．緒　言　　直交異方性板の曲げに関する問題は，土木構造物の解析上重要であり応用も広く行なわれている。周辺が支持された異方性矩形板の曲げについてはすでに広く研究が行なわれている[1]。一方，無限帯状板は橋梁の床版などの設計上必要なものであり，等方性の帯状板については二辺単純支持のものに関して，その成果は得られているといってよいであろう。しかしコンクリート床版にしても鋼床版にしても必要なものは直交異方性板に関するものが多いのであるが，これに関しては，集中荷重が作用したもの[2]，および対称軸上（中央）に矩形荷重が載荷されたもので限られた条件下のものがあるが，一般に任意の位置に矩形分布荷重が作用した二辺単純支持の直交異方性無限帯状板の解析は，車輪荷重載荷の場合必要となるにもかかわらず，みあたらないようである。実際には手数のかかる影響面を利用して設計が行なわれているのが現状であろう。

本論文はこの問題について一般の場合について解式を求めたものである。

2．解式の誘導と結果

直交異方性板のつり合い方程式は

$$N_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+N_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p(x,y)\text{ --------(1)}$$



図－1

ここに，

$$N_x=\frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}\qquad N_y=\frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)}\qquad C=\frac{G_{xy}h^3}{12}$$

$$2H=N_x\nu_y+N_y\nu_x+4C$$

E_x, E_y はそれぞれ x 方向，y 方向の弾性係数，ν_x, ν_y はポアソン比，G_{xy} はせん断弾性係数，h は板厚である。

(1)式の両辺を N_x で割る。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2H}{N_x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{N_y}{N_x}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p(x,y)}{N_x}$$

ここで $\dfrac{N_y}{N_x}=K^2$，$\dfrac{2H}{N_x}=\nu_y+K^2\nu_x+\dfrac{4C}{N_x}=2\left(\dfrac{\nu_y}{2}+\dfrac{\nu_x}{2}K^2+\dfrac{2C}{N_x}\right)=2K'^2$ とおく

すると $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2K'^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+K^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p(x,y)}{N_x}\text{ -----------(2)}$$

ここで　式(2)を次の様に書きかえる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(\lambda^2+\lambda'^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^2\lambda'^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p(x,y)}{N_x}\text{ -----------(3)}$$

又，x 方向および y 方向の曲げ剛性の相乗平均値に対するねじり剛性の比 κ，すなわち $\kappa=\dfrac{H}{\sqrt{N_x N_y}}$ と定義すれば，κ の値に応じて次の3通りに分けられる。

CASE(1)：$K'^4-K^2>0$（$\kappa>1$），このとき　$\lambda^2=K'^2+\sqrt{K'^4-K^2}$　　$\lambda'^2=K'^2-\sqrt{K'^4-K^2}$

CASE(2)：$K'^4-K^2<0$（$\kappa<1$）　このとき　$\lambda^2=K'^2+i\sqrt{K^2-K'^4}$　　$\lambda'^2=K'^2-i\sqrt{K^2-K'^4}$

CASE(3)：$K'^4-K^2=0$（$\kappa=1$）　このとき　$\lambda^2=\lambda'^2=K'^2$

図－1に示す，矩形荷重 $P=4pcd$ の荷重展開として

$$p(x,y)=\frac{2P}{\pi^2 cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha d}{\alpha}\cdot\cos\alpha y\,d\alpha \text{ --------(4)}$$

たわみwとして $$w=\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\int_0^{\infty}C(\alpha)\cos\alpha y\,d\alpha \text{ ---------(5)}$$

式(4)、(5)を式(3)に代入するとC(α) が得られる。

$$C(\alpha)=\frac{2P}{n\pi^3 N_x cd}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\lambda^2\alpha^2\right)\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\lambda'^2\alpha^2\right)}\quad\frac{\sin\alpha d}{\alpha}\cdot\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}$$

従がって、たわみwは、

$$w=\frac{2P}{\pi^2 N_x cd}\cdot\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{n\pi c}{a}\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot I \text{ ----------(6)}$$

ここで $$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha d\cdot\sin\alpha y}{\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\lambda^2\alpha^2\right)\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\lambda'^2\alpha^2\right)\alpha}d\alpha \text{ -------(7)}$$

式(7)において、$\varepsilon^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $\beta^2=\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}$, $\beta'^2=\frac{\varepsilon^2}{\lambda'^2}$ とおくと

$$I=\frac{1}{\lambda^2\lambda'^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{(\beta^2+\alpha^2)(\beta'^2+\alpha^2)}\frac{\sin\alpha d}{\alpha}\cdot\cos\alpha y\,d\alpha$$

$$\frac{1}{\lambda^2\lambda'^2(\beta'^2-\beta^2)}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}\right)-\frac{1}{\beta'^2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta'^2+\alpha^2}\right)\right]\sin\alpha d\cdot\cos\alpha y\,d\alpha \text{ ----------(8)}$$

式(8)で示されるIをCASE(1)〜CASE(3)に応じて求めるとたわみwが得られる。以下に(8)式の積分結果を示す。

(i) CASE(1), $K^4-K^2>0$ $(\chi>1)$ のとき

$y\geqq d$ に対して、

$$I=\frac{\pi}{2(\beta'^2-\beta^2)}\left(\frac{e^{-\beta y}\cdot\sinh\beta d}{\beta^2}-\frac{e^{-\beta' y}\cdot\sinh\beta' d}{\beta'^2}\right)\cdot\frac{N_x}{N_y}$$

$y<d$ に対して

$$I=\frac{\pi}{2(\beta'^2-\beta^2)}\left\{\frac{1}{\beta^2}(1-e^{-\beta d}\cdot\cosh\beta y)-\frac{1}{\beta'^2}(1-e^{-\beta' d}\cdot\cosh\beta' y)\right\}\frac{N_x}{N_y}$$

(ii) CASE(2), $K^4-K^2<0$ $(\chi<1)$ のとき

ここで、 $\beta=\varphi-i\psi$, $\beta'=\varphi+i\psi$, $\beta^2=A-iB$, $\beta'^2=A+iB$ とおく

$$\varphi=\frac{n\pi}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{N_x}{N_y}}+\frac{H}{N_y}\right)},\quad\psi=\frac{n\pi}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{N_x}{N_y}}-\frac{H}{N_y}\right)}$$

$$A=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\cdot\frac{H}{N_y}\qquad B=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\cdot\frac{1}{N_y}\sqrt{N_xN_y-H^2}$$

$y\geqq d$ に対して

$$I=\frac{\pi}{8B(A^2+B^2)}\left\{(Ai-B)(e^{-\beta Y}-e^{-\beta\bar{Y}})-(Ai+B)(e^{-\beta' Y}-e^{-\beta'\bar{Y}})\right\}\cdot\frac{N_x}{N_y}$$

$$=\frac{\pi}{4B(A^2+B^2)}\left\{e^{-\varphi Y}(-A\sin\psi Y-B\cos\psi Y)+e^{-\varphi\bar{Y}}(A\sin\psi\bar{Y}+B\cos\psi\bar{Y})\right\}\frac{N_x}{N_y}$$

ここに、$Y=y+d$, $\bar{Y}=y-d$

$y<d$ に対して

$$I=\frac{\pi}{4B(A^2+B^2)}\left\{2B-\bar{e}^{\varphi Y}(A\sin\psi Y+B\cos\psi Y)-\bar{e}^{\varphi\bar{Y}}(A\sin\psi\bar{Y}+B\cos\psi\bar{Y})\right\}\frac{N_x}{N_y}$$

ここに，$Y=y+d$，$\bar{Y}=d-y$

(iii) CASE(3) $K'^4-K^2=0$ $(\chi=1)$ のとき

$\lambda^2=\lambda^2=K'^2=\frac{H}{N_x}$ より (8) 式 は $I=\frac{1}{\lambda^4}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha d\cdot\cos\alpha y}{\alpha(\beta^2+\alpha^2)^2}d\alpha$

$y\geqq d$ に対して

$$I=\frac{\pi}{4\lambda^4\beta^4}\left\{(2+\beta y)\sinh\beta d-\beta d\cosh\beta d\right\}\bar{e}^{\beta y}$$

$y<d$ に対して

$$I=\frac{\pi}{4\lambda^4\beta^4}\left[2-\left\{(2+\beta d)\cosh\beta y-\beta y\cdot\sinh\beta y\right\}\bar{e}^{\beta d}\right]$$

以上の I を(6)式に代入することにより、たわみωが得られる。
以下にたわみω、断面力M_x, M_yを次式より求め、結果のみを示す。

$$M_x=-N_x\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\nu_y\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-N_y\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\nu_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)$$

2.1) CASE(1) $K'^4-K^2>0$, $(\chi>1)$ のときのたわみω、断面力M_x, M_y

$y\geqq d$ に対して

$$\omega=\frac{Pa^4}{\pi^5N_xcd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left(\omega_1^2\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}y}\sinh\frac{n}{\omega_1}d-\omega_2^2\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}y}\sinh\frac{n}{\omega_2}d\right)\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{\pi^3cd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\omega_1^2\left(1-\frac{\nu_ya^2}{\pi^2\omega_1^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}y}\sinh\frac{n}{\omega_1}d-\omega_2^2\left(1-\frac{\nu_ya^2}{\pi^2\omega_2^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}y}\cdot\sinh\frac{n}{\omega_2}d\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{\pi^3cd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cdot\frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\omega_1^2\left(\nu_x-\frac{a^2}{\pi^2\omega_1^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}y}\sinh\frac{n}{\omega_1}d-\omega_2^2\left(\nu_x-\frac{a^2}{\pi^2\omega_2^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}y}\cdot\sinh\frac{n}{\omega_2}d\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$y<d$ に対して

$$\omega=\frac{Pa^4}{\pi^5N_xcd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{\omega_1^2\left(1-\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}d}\cdot\cosh\frac{n}{\omega_1}y\right)-\omega_2^2\left(1-\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}d}\cdot\cosh\frac{n}{\omega_2}y\right)\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{\pi^3cd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[\omega_1^2\left\{1-\left(1-\frac{\nu_ya^2}{\pi^2\omega_1^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}d}\cosh\frac{n}{\omega_1}y\right\}-\omega_2^2\left\{1-\left(1-\frac{\nu_ya^2}{\pi^2\omega_2^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}d}\cosh\frac{n}{\omega_2}y\right\}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{\pi^3cd(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cdot\frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[\omega_1^2\left\{\nu_x-\left(\nu_x-\frac{a^2}{\pi^2\omega_1^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_1}d}\cdot\cosh\frac{n}{\omega_1}y\right\}-\omega_2^2\left\{\nu_x-\left(\nu_x-\frac{a^2}{\pi^2\omega_2^2}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\omega_2}d}\cosh\frac{n}{\omega_2}y\right\}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

ここに，$\mu=\sqrt[4]{\frac{N_y}{N_x}}$　　$\omega_1=\frac{a\mu}{\pi}\sqrt{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$，$\omega_2=\frac{a\mu}{\pi}\sqrt{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$

2.2) CASE(2) $K'^4-K^2<0$ $(\chi<1)$ のときのたわみω、断面力M_x, M_y

$y\geqq d$ に対して

$$\omega=\frac{Pa^4}{2\pi^5N_xcd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{\bar{e}^{\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}\left(\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)-\bar{e}^{\frac{n}{\delta_2}Y}\left(\cos\frac{n}{\delta_1}Y+\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{2\pi^3cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\left(A_1\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+B_1\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)\bar{e}^{\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}-\left(A_1\cos\frac{n}{\delta_1}Y+B_1\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)\bar{e}^{\frac{n}{\delta_2}Y}\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\cdot\frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\left(C_1\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+D_1\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}-\left(C_1\cos\frac{n}{\delta_1}Y+D_1\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}Y}\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

ここで. $Y=y+d$, $\bar{Y}=y-d$

$y<d$に対して

$$w=\frac{Pa^4}{2\pi^5 N_x cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{2-e^{-\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}\left(\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)-e^{-\frac{n}{\delta_2}Y}\left(\cos\frac{n}{\delta_1}Y+\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{2-\left(A_1\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+B_1\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}-\left(A_1\cos\frac{n}{\delta_1}Y+B_1\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}Y}\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\ \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\ \frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{2\nu_x-\left(C_1\cos\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}+D_1\sin\frac{n}{\delta_1}\bar{Y}\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}\bar{Y}}-\left(C_1\cos\frac{n}{\delta_1}Y+D_1\sin\frac{n}{\delta_1}Y\right)e^{-\frac{n}{\delta_2}Y}\right\}\sin\frac{n\pi c}{a}\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

ここで　$Y=y+d$, $\bar{Y}=d-y$

また、
$$A_1=1+\frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}-\frac{1}{\delta_2^2}\right)\nu_y+\frac{2\nu_y a^2}{\pi^2\delta_1\delta_2}\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}},\quad B_1=\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}+\frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}-\frac{1}{\delta_2^2}\right)\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\nu_y-\frac{2\nu_y a^2}{\pi^2\delta_1\delta_2}$$

$$C_1=\nu_x+\frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}-\frac{1}{\delta_2^2}\right)+\frac{2a^2}{\pi^2\delta_1\delta_2}\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\qquad D_1=\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}\nu_x+\frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\delta_1^2}-\frac{1}{\delta_2^2}\right)\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}-\frac{2a^2}{\pi^2\delta_1\delta_2}$$

さらに
$$\delta_1=\frac{a\mu}{\pi}\sqrt{\frac{2}{1-\chi}}\qquad \delta_2=\frac{a\mu}{\pi}\sqrt{\frac{2}{1+\chi}}\qquad \mu=\sqrt[4]{\frac{N_y}{N_x}}$$

2.3) CASE(3)　$K'^4-K^2=0$ ($\chi=1$) のときのたわみw、断面力M_x, M_y　　$\mu=\sqrt[4]{\frac{N_y}{N_x}}$, $r=\frac{a\mu}{\pi}$とする

$y\geqq d$に対して

$$w=\frac{Pa^4}{2\pi^5 N_x cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{\left(2+\frac{n}{r}y\right)\sinh\frac{n}{r}d-\frac{n}{r}d\cdot\cosh\frac{n}{r}d\right\}e^{-\frac{n}{r}y}\cdot\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[\left\{2+\frac{n}{r}y\left(1-\frac{\nu_y}{\mu^2}\right)\right\}\sinh\frac{n}{r}d\cdot e^{-\frac{n}{r}y}-\frac{n}{r}d\left(1-\frac{\nu_y}{\mu^2}\right)\cosh\frac{n}{r}d\cdot e^{-\frac{n}{r}y}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\cdot\frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[\frac{nd}{r}\left(\frac{1}{\mu^2}-\nu_x\right)\cosh\frac{n}{r}d\cdot e^{-\frac{n}{r}y}+\left\{2\nu_x-\frac{n}{r}y\left(\frac{1}{\mu^2}-\nu_x\right)\right\}\sinh\frac{n}{r}d\ e^{-\frac{n}{r}y}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$y<d$に対して

$$w=\frac{Pa^4}{2\pi^5 N_x cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[2-\left\{\left(2+\frac{n}{r}d\right)\cosh\frac{n}{r}y-\frac{n}{r}y\cdot\sinh\frac{n}{r}y\right\}e^{-\frac{n}{r}d}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\ \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_x=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[2-\left\{2+\frac{n}{r}d\left(1-\frac{\nu_y}{\mu^2}\right)\right\}\cosh\frac{n}{r}y\ e^{-\frac{n}{r}d}+\frac{n}{r}y\cdot\left(1-\frac{\nu_y}{\mu^2}\right)\sinh\frac{n}{r}y\cdot e^{-\frac{n}{r}d}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$M_y=\frac{Pa^2}{2\pi^3 cd}\cdot\frac{N_y}{N_x}\sum_{n=1,2\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[2\nu_x+\left\{\frac{n}{r}d\left(\frac{1}{\mu^2}-\nu_x\right)-2\nu_x\right\}\cosh\frac{n}{r}y\cdot e^{-\frac{n}{r}d}-\frac{n}{r}y\left(\frac{1}{\mu^2}-\nu_x\right)\sinh\frac{n}{r}y\cdot e^{-\frac{n}{r}d}\right]\sin\frac{n\pi c}{a}\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

3、あとがき　上に得られた公式は車輪荷重を担う異方性床版の応力算定に用いることができる。また実用上必要なパラメーターにつき、あらかじめ数値表または図表が用意されれば設計上便利であろう。上の結果は別に、部分分布線荷重に対する解を境界条件と連続条件を考慮して解くことにより、$y\geqq d$の場合は上と一致することが確認されている。

4. 参考文献

1) 例えば S. Iguchi.: Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten Springer, 1933.　2) Glahn, H.: Zur Berechnung der Momente und Querkräfte des an den Längsrändern frei drehbar gelagerten orthotropen Platten und Halbstreifens unter Einzellast mittels geschlossener Lösungen, Stahlbau 12, 1974.