

移動荷重による矩形板の解析

北大	工学部	正員	能町 純雄
〃		正員	角田 史雄
〃		学生員	○ 岸 徳光

1. まねがき

近年、構造物の大型化にともない土木の分野でも薄肉構造物が多く見受けられるようになっている。これらの構造物の解析において、静的な問題は従来より理論的にも実験的にも多くの研究がなされているが、動的解析はいまだ不十分と思われる。

著者は先に二、三の薄肉構造体の波動伝播特性について調べ、構造体と構成する薄板要素の面内振動が波動伝播特性に大きく影響することと報告した¹⁾。この現象は薄肉断面桁の発振機構(騒音、超体周波振動)に大きく影響するものと考えられる。本論文では、この機構解明の1つの手がかりとして四辺単純支持矩形板の移動荷重による動的応答特性を求める。矩形板の応答問題については過去に多くの研究成果があるが本文においては理論の応用性と簡便性とを旨として Galerkin 法²⁾を用いることにする。

2. 解析理論

図-1 のような矩形板を考え微小変形を仮定し薄板のせん断変形と回転慣性は無視する。たわみ、回転角を w, θ とし、 x, y 軸回りの曲げモーメント およびねじりモーメントを M_y, M_x, M_{yx} とすると、平板の基礎微分方程式は、

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p \quad \dots (1)$$

ただし、 ρ は単位体積質量、 t は時間である。

変位関数を $\phi^w/\phi_y^d = 0$ より y 方向に3次の多項式に仮定し境界条件に留意して整理すると次のように示される。

$$W(xy) = [w^{(1)} \quad \theta^{(1)} \quad w^{(2)} \quad \theta^{(2)}] [w_1(x) \quad \theta_1(x) \quad w_2(x) \quad \theta_2(x)]^T \quad \dots \quad (2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} W^{(i)} &= 1 - \frac{3}{b^2}y^2 + \frac{2}{b^3}y^3 \\ W^{(j)} &= \frac{3}{b^3}y^2 - \frac{2}{b^3}y^3 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \theta^{(i)} &= y - \frac{2}{b}y^2 + \frac{1}{b^3}y^3 \\ \theta^{(j)} &= -\frac{1}{b}y^2 + \frac{1}{b^3}y^3 \end{aligned} \quad \dots (3)$$

断面力と変位の関係式は kirchhoff の仮定により、

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad R_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}$$

試験関数式(3)を用いて式(1)に Galerkin 法を適用すると、

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p \right\} w^{(k)} dy = 0 \quad (k=i, j) \quad \dots (5)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p \right\} \Theta^{(k)} dy = 0 \quad (k = i, j) \quad \dots (6)$$

式(4)を用いて境界条件に留意して式(5), (6)について部分積分を施し座標の正の向きに全てを整理すると、各境界断面力は、

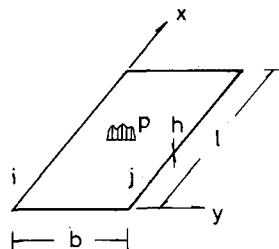


图-1 矩形板要素

$$\begin{Bmatrix} R_{yji} \\ M_{yji} \\ R_{yji} \\ M_{yji} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} \frac{13}{35} b D^{(4)} - \frac{12}{5b} D^{(2)} + \frac{12}{b^3} & \frac{11}{210} b^2 D^{(4)} - (\nu + \frac{1}{5}) D^{(2)} + \frac{6}{b^2} & \frac{9}{70} b D^{(4)} + \frac{12}{5b} D^{(2)} - \frac{12}{b^3} & -\frac{13}{420} b^2 D^{(4)} - \frac{1}{5} D^{(2)} + \frac{6}{b^2} \\ \frac{b^3}{105} D^{(4)} - \frac{4b}{15} D^{(2)} + \frac{4}{b} & \frac{13}{420} b^2 D^{(4)} + \frac{1}{5} D^{(2)} - \frac{6}{b^2} & -\frac{b^3}{140} D^{(4)} + \frac{b}{15} D^{(2)} + \frac{2}{b} & \\ \text{Symm.} & & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} \\ + p h T^{(2)} \begin{Bmatrix} \frac{13}{35} b & \frac{11}{210} b^2 & \frac{9}{70} b & -\frac{13}{420} b^2 \\ \frac{b^3}{105} & \frac{13}{420} b^2 & -\frac{b^3}{140} & \\ \text{Symm.} & & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{b}{2} \\ -\frac{b^3}{12} \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{b}{12} \end{Bmatrix} \{p\} \quad \dots (7)$$

なお、式中 $D^{(4)} = \partial^4 / \partial x^4$, $D^{(2)} = \partial^2 / \partial x^2$, $T^{(2)} = \partial^2 / \partial x^2$, D は曲げ剛性を示すものである。

3. 四辺単純支持矩形板の解析

図-2 のような四辺単純支持された矩形板の移動速度 C_1 を持つ線荷重 p による動的応答解析をここで行う。より単純な形で解析するために y 方向には分割せず一枚板とした。

境界条件は四辺単純支持でありかつ対称変形であるから

$$w_0 = w_b = 0, \quad M_{y0} = M_{yb} = 0, \quad \theta_0 = -\theta_b \quad \dots (8)$$

式(8)を式(7)に代入して整理すると矩形板の移動荷重についての基礎微分方程式が求められる。

$$D \left(\frac{b^3}{60} D^{(4)} - \frac{b}{3} D^{(2)} + \frac{2}{b} \right) \theta_0 + p h \frac{b^3}{60} T^{(2)} \theta_0 = \frac{b^2}{12} p \quad \dots (9)$$

上式の厳密解に対する精度の検討を位相速度分散曲線で行なうと図-3 のような結果となる。これより一枚板として用いても十分の精度が得られることがわかる。

式(9)の両辺に $\sin m\pi x/l$ を乗じ有限 Fourier 変換を施すと

$$\left[\left\{ \frac{b^3}{60} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{b}{3} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{2}{b} \right\} + p h \frac{b^3}{60} T^{(2)} \right] S_m[\theta_0] = \frac{b^2}{12} S_m[p] \quad \dots (10)$$

一般解 θ_{0g} と特殊解 θ_{0s} に分けて解析する。

θ_{0g} ; $p=0$ とし固有の位相速度を C_0 とし $S_m[\theta_{0g}] = S_m[\theta_g]$, $\sin m\pi C_0 x/l$ と仮定すると式(10)より $\nabla_0 (= C_0/C_s)$ は、

$$\nabla_0 = \left(\frac{m\pi}{l} \right) r_p \nabla_p \sqrt{1 + \frac{20}{b^2} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 + \frac{120}{b^4} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^4} \quad \dots (11)$$

ただし $\nabla_p = \sqrt{C_p/C_s}$, $C_s = \sqrt{G/\rho}$, $C_p = \sqrt{E/(1-\nu^2)\rho}$; $r_p = \sqrt{I/A}$, $S_m[\theta_0] = \int_0^l \theta_0 \sin \frac{m\pi}{l} x dx$

θ_{0s} ; 式(10)で p の移動荷重を C_1 と仮定しているから、 $S_m[p] = p \sin m\pi C_1 x/l$ となる。これより $S_m[\theta_{0s}] = S_m[\theta_s] \sin m\pi C_1 x/l$ とし未定定数を求めると、

$$S_m[\theta_s] = \frac{5}{Db} \left(\frac{l}{m\pi} r_p \nabla_p \right)^2 \frac{p}{\nabla_0^2 - \nabla_1^2} \quad \dots (12)$$

したがって θ_0 の像関数は、

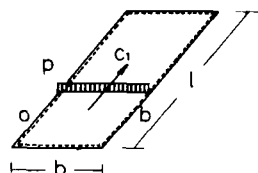


図-2 四辺単純支持矩形板

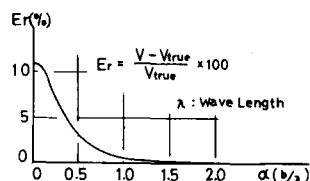


図-3 厳密解に対する精度

$$S_m[\theta_0] = S_m[\theta_g] \sin m\pi c_0 t / l + S_m[\theta_s] \sin m\pi c_1 t / l \quad \text{---- (13)}$$

ここで未定定数 $S_m[\theta_g]$ を決定するため初期条件を設定する。 すなわち

$$t=0 \rightarrow \theta_0=0, \quad \partial\theta_0/\partial t=0 \quad \text{---- (14)}$$

式(13)を式(14)に代入して $S_m[\theta_0]$ を求め、さらに逆変換を施すと θ_0 が求まる。

$$\theta_0 = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_m[\theta_s] \left\{ \sin \frac{m\pi}{l} c_1 t - \frac{V_1}{V_0} \sin \frac{m\pi}{l} c_0 t \right\} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad \text{---- (15)}$$

また、粒子速度 $\dot{\theta}_0 (= \partial\theta_0/\partial t)$ は

$$\dot{\theta}_0 = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_m[\theta_s] \frac{m\pi}{l} c_1 \left\{ \cos \frac{m\pi}{l} c_1 t - \cos \frac{m\pi}{l} c_0 t \right\} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad \text{---- (16)}$$

以上、式(15)、(16)より移動荷重による動的応答を求めることができる。

なお、一般解の部分は時間関数部に固有の位相速度を含むため m について閉じることができないが、特殊解の部分は一定の移動速度を含むので閉じた式にすることができる。ここで、特殊解の部分を

$$\theta_{os} = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_m[\theta_s] \sin \frac{m\pi}{l} c_1 t \sin \frac{m\pi}{l} x = \theta_s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi \xi_s \sin m\pi \xi}{\{m^2 + \alpha^2\}^2 + \beta^4} \quad \text{---- (17)}$$

$$\dot{\theta}_{os} = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_m[\theta_s] \frac{m\pi}{l} c_1 \cos \frac{m\pi}{l} c_1 t \sin \frac{m\pi}{l} x = \dot{\theta}_s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cos m\pi \xi_s \sin m\pi \xi}{\{m^2 + \alpha^2\}^2 + \beta^4} \quad \text{---- (18)}$$

と変形する。ただし

$$\theta_s = \frac{10P}{Dbl} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4, \quad \dot{\theta}_s = \frac{10Pc_1}{Dbl} \left(\frac{l}{\pi}\right)^3, \quad 2X = 20 - \left(\frac{V_1 b}{l_p V_p}\right)^2, \quad \alpha^2 = \left(\frac{l}{b\pi}\right)^2 X, \quad \beta^4 = \left(\frac{l}{b\pi}\right)^4 (120 - X^2)$$

$$\xi_1 = c_1 t / l, \quad \xi = x / l$$

式(17)、(18)は α^2, β^4 の大きさによって場合分けをしなければならない。ここでは $\alpha^2 > 0, \beta^4 > 0$ の場合についてのみ述べるが他の場合についてもまったく同様にして求めることができる。

$$C^4 = \beta^4 / \alpha^4, \quad \lambda_1 = \alpha \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+C^4} + 1)}, \quad \lambda_2 = \alpha \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+C^4} - 1)}$$

とみると

$$\theta_{os} = \theta_s \frac{\pi}{4\beta^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left\{ \lambda_1 \psi(\xi, \xi_1) + \lambda_2 \phi(\xi, \xi_1) \right\} \quad \text{--- } (\xi_1 > \xi) \quad \text{---- (19)}$$

$$= \quad \quad \quad \left\{ \lambda_1 \psi(\xi_1, \xi) + \lambda_2 \phi(\xi_1, \xi) \right\} \quad \text{--- } (\xi_1 < \xi) \quad \text{---- (20)}$$

$$\dot{\theta}_{os} = \dot{\theta}_s \frac{\pi}{4\beta^2} \chi(\xi, \xi_1) \quad \text{--- } (\xi_1 > \xi) \quad \text{---- (21)}$$

$$= \quad \quad \quad \chi^*(\xi_1, \xi) \quad \text{--- } (\xi_1 < \xi) \quad \text{---- (22)}$$

ただし

$$\psi(\xi, \xi_1) = \frac{1}{ch 2\pi\lambda_1 - \cos 2\pi\lambda_2} \left\{ ch \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 + \xi) \sin \lambda_2 \pi (\xi_1 - \xi) - ch \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \sin \lambda_2 \pi (\xi_1 + \xi) \right. \\ \left. + ch \lambda_1 \pi (\xi_1 - \xi) \sin \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 + \xi) - ch \lambda_1 \pi (\xi_1 + \xi) \sin \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \right\} \quad \text{---- (23)}$$

$$\phi(\xi, \xi_1) = \frac{1}{ch 2\pi\lambda_1 - \cos 2\pi\lambda_2} \left\{ sh \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 + \xi) \cos \lambda_2 \pi (\xi_1 - \xi) - sh \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \cos \lambda_2 \pi (\xi_1 + \xi) \right. \\ \left. + sh \lambda_1 \pi (\xi_1 - \xi) \cos \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 + \xi) - sh \lambda_1 \pi (\xi_1 + \xi) \cos \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \right\} \quad \text{---- (24)}$$

$$\chi(\xi, \xi_1) = \frac{-1}{ch 2\pi\lambda_1 - \cos 2\pi\lambda_2} \left\{ + sh \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 + \xi) \sin \lambda_2 \pi (\xi_1 - \xi) - sh \lambda_1 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \sin \lambda_2 \pi (\xi_1 + \xi) \right. \\ \left. + sh \lambda_1 \pi (\xi_1 - \xi) \sin \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 + \xi) - sh \lambda_1 \pi (\xi_1 + \xi) \sin \lambda_2 \pi (2 - \xi_1 - \xi) \right\} \quad \text{---- (25)}$$

である。

4. 数値計算

数値計算例として、 $b/b_p = 10.0$ 、 $b/p_p = 300.0$ の鋼板形板を選び移動荷重は $C_1 = 90 \text{ km/h}$ とした。結果は特に断面方向中央点に注目して整理する。断面中央点のため W_c は式(2)より $W_c = b/4 \cdot \theta_0$ となる。したがって各定数は、

$$W_s = \frac{5}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^4 \frac{p}{\delta L}, \quad \dot{W}_s = \frac{5}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^3 \frac{p C_1}{\delta L}$$

となる。図-3, 4に軸方向たわみ分布、図-5, 6に軸方向粒子速度分布について、一般解の部分と特殊解、完全解の部分に分けて示した。矢印は荷重点を示している。なお一般解の部分は $m = 80$ 項まで求めた。

これより、一般解の部分は矩形板の場合の波長 $\lambda \approx 2b$ の場合の伝播速度で伝播することがわかり、また特殊解の部分は式(23)~(25)より波長 $\lambda \approx 6.4b$ 、速度 C_1 で伝播することがわかる。したがって完全解はこれらの状態の重なり合ったものとなる。

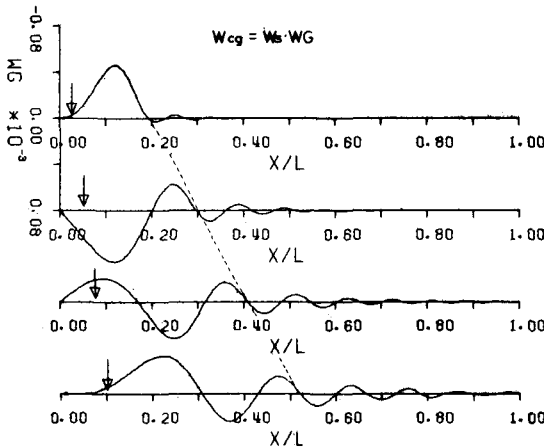


図-3 軸方向たわみ分布(一般解の部分)

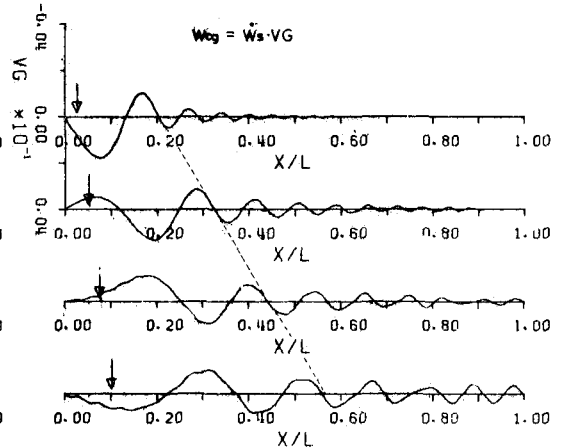


図-5 軸方向粒子速度分布(一般解の部分)

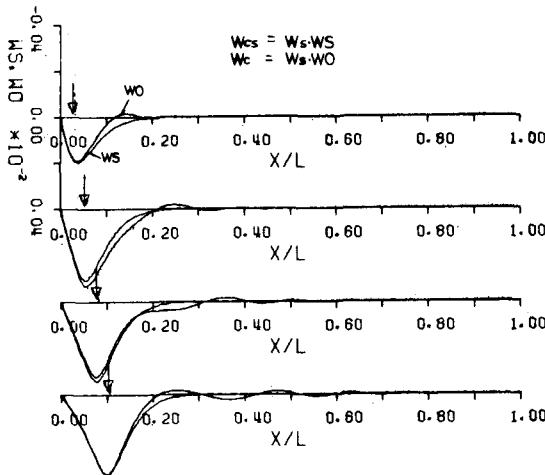


図-4 軸方向たわみ分布(特殊解および完全解)

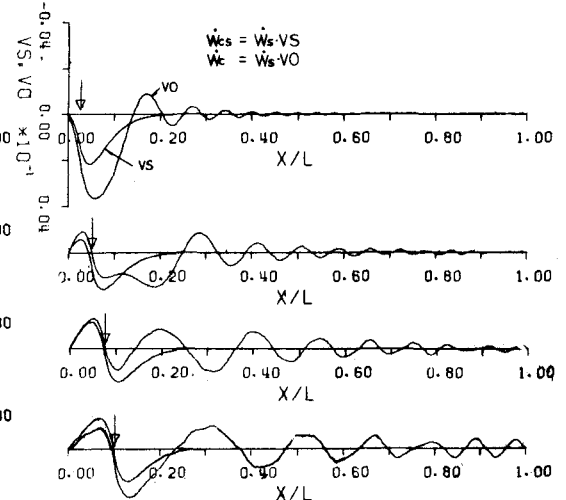


図-6 軸方向粒子速度分布(特殊解および完全解)

参考文献 1) 能野秋雄 et al. 薄肉箱形部材の波動分散関係について JSSC 99回マトリクス構造解析法研究発表論文集, 1975.

2) 奥村敏恵 et al. 薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用 土木学会論文報告集, 176号, 1970.4.