

構造物の動的安定性及び減衰の不安定領域に及ぼす影響について

北海道大学 正員 芳村 仁
北海道大学 正員 O三上 隆

1. まえがき

直線圧縮材が周期的に変化する外力(圧縮力)を受ける場合などは、外力の周期と構造物の動的特性のある固くある特別な関係(外力の周期と圧縮材の横振動の固有周期との比がある特定値)があれば、本来の横振動に加えて横振動が発生し、静的安定限界より低い外力の値で振動振幅が時間と共に急激に増大する動的不安定現象、すなわち係数加振型不安定現象(パラメトリック不安定現象)が存在することは知られている。

従来この種の研究では特定の境界条件での研究(例えば両端Pin結合の圧縮材)が多いが任意の支持条件での研究は少ないように思われる。本報告は任意支持条件にも適用できるようにユトリックス変位法により解析し、不安定領域(1次, 2次)を求め、又減衰の不安定領域に及ぼす影響を検討したものである。

2. 構造物の運動方程式の導導

いま、図-2に示すような1つの要素*i*を取り出して考える。

要素(構造物)の変位 $w(x, t)$ は位置のみの変数 $w(x)$ と時間 t のみの変数 $g(t)$ の積で表わされるとする。

$$w(x, t) = w(x) g(t) \quad (1)$$

$w(x)$ として3次関数を用いると、

$$\begin{aligned} w(x, t) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3\}^T \\ &= [H(x)] \{a\}^T \quad (2) \end{aligned}$$

ここで $a_0 \dots a_3$ を $w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2$ で表わすと、

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{l^2} & \frac{x}{l} & \frac{x^2}{l^2} & \frac{x^3}{l^3} \\ \frac{x}{l^2} & \frac{x}{l^2} & \frac{x^2}{l^2} & \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [B] \{r\} \quad (3)$$

ここで、 l = 要素の長さ

$$w(x, t) = w(x) g(t) = [H(x)][B] \{r\} g(t) \quad (4)$$

ここで、軸圧縮力 P が作用する直線圧縮材の運動エネルギー(T)、ヒズミエネルギー(U)、軸圧縮力によるエネルギー(V)、そして減衰の考慮として、固有ベクトルを用いて対角化できる場合を考え減衰力が分布する質量の速度に比例したものを考え、変数エネルギー(F)を求める。

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t)^2 dx \quad (5)$$

ρ = 単位体積当り重量

ここで $\dot{}$ = 時間に関する微分 g = 重力加速度 ※

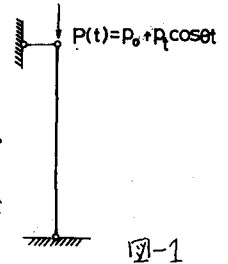


図-1



図-2

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \epsilon^2 dx \quad (6)$$

$$\epsilon = -y'' \quad H(x) \text{ B r f g}$$

$$\delta = E \epsilon$$

$$I = \int_0^L x^2 dx \text{ 断面二次モーメント} \quad E = \gamma > \gamma \text{ 係数}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L P \{w'(x, t)\}^2 dx \quad (7)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha \{\dot{w}(x, t)\}^2 dx \quad (8)$$

$$\alpha = \text{定数}$$

(4)を(5)~(8)に代入すると、

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{r}^T [B]^T [H]^T [H] [B] r g^2 dt \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{r\}^T g^2 [B]^T [H]^T E I [H] [B] r g^2 dt$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \{r\}^T g^2 [B]^T [H]^T P [B] [H] \{r\} g^2 dt$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha \{r\}^T g^2 [B]^T [H]^T [H] [B] r g^2 dt$$

ここで I = 断面二次モーメント

A = 断面積

Lagrange 方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_f} \right) - \frac{\partial T}{\partial r_f} - \frac{\partial V}{\partial r_f} + \frac{\partial F}{\partial r_f} = 0$ * $[M] \ddot{r}_f + [C] \dot{r}_f + [K_E - P[S_q] - R[S_q] \cos \theta] r_f = 0$ (12)

より, $[M] \ddot{r}_f + [C] \dot{r}_f + [K_E - [K_q]] r_f = 0$ (10)

ここで
$$\left. \begin{aligned} [M] &= [B] \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\gamma A}{g} [H(\omega)] [H(\omega)] d\alpha \right\} [B] \\ [K_q] &= [B] \left\{ \int_0^{\pi} [H(\omega)] EI [H(\omega)] d\alpha \right\} [B] \\ [K_q] &= [B] \left\{ \int_0^{\pi} [H(\omega)] P [H(\omega)] d\alpha \right\} [B] \\ [C] &= \alpha [M] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

さらに $K_q = P S_q$ とおき, $P = P_0 + P_1 \cos \theta$ (θ = 圧縮力の振動数) とおくと (10) 式は次のようにえられる.*

3. 境界振動数方程式の誘導

時間 t の関数 $r_f(t)$ を次のフーリエ級数で仮定する。

周期 $2T$ をもつ周期解を $r_f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_n \sin \frac{n\theta t}{2} + B_n \cos \frac{n\theta t}{2})$ (13)

周期 T をもつ周期解を $r_f(t) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (A_n \sin \frac{n\theta t}{2} + B_n \cos \frac{n\theta t}{2})$ (14)

式(13)を式(12)に代入するとより, 主不安定領域(1次不安定領域)の境界振動方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} [K_E - P_0[S_q] + \frac{1}{2} P_1[S_q] - \frac{1}{4} \theta^2 [M] & -\frac{[C]}{2} \theta \\ \frac{[C]}{2} \theta & [K_E - P_0[S_q] - \frac{1}{2} P_1[S_q] - \frac{1}{4} \theta^2 [M] \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

減衰を無視すると, $[K_E - P_0[S_q] \pm \frac{1}{2} P_1[S_q] - \frac{1}{4} \theta^2 [M]] = 0$ (15')

式(14)を式(12)に代入すると, 2次不安定領域の振動方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} [K_E - P_0[S_q] - \theta^2 [M] & 0 & -\theta [C] \\ 0 & [K_E - P_0[S_q] & -P_1[S_q] \\ \theta [C] & -0.5 P_1[S_q] & [K_E - P_0[S_q] - \theta^2 [M] \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

減衰を無視すると

$$\begin{vmatrix} [K_E - P_0[S_q] - \theta^2 [M] & -0.5 P_1[S_q] \\ -0.5 P_1[S_q] & [K_E - P_0[S_q] - 4\theta^2 [M] \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} [K_E - P_0[S_q] & -P_1[S_q] \\ -0.5 P_1[S_q] & [K_E - P_0[S_q] - \theta^2 [M] \end{vmatrix} = 0 \quad (16')$$

式(15)を用いて動的不安定領域に影響を及ぼすパラメータ (振動数 θ , 構造物の固有振動数 ω , 圧縮値 P^*) の関係について述べる。

式(15)を無次元化し,

$$[K_E] - P_0 \frac{P^*}{EI} [S_q] \pm \frac{1}{2} P_1 \frac{P^*}{EI} [S_q] - \frac{1}{4} \theta^2 \frac{\gamma A L^2}{g} [M] = 0 \quad (17)$$

ここで, K_E, S_q, M は無次元化されたパラメータ
 $P_0 = \alpha P^*, P_1 = b P^*, \theta = c \omega_i$ (α, b, c = 定数)
 $P^* = i$ 番目の圧縮値
 $\omega_i = i$ 番目の固有振動数

上式が動的不安定問題の微分方程式である。

式(12)は Mathieu 方程式のよく知られている性質より, 微分方程式の解は $\theta = 1$ の場合は周期 $T = 2\pi/\theta$ を持つ解であり, 第2の解は周期 $2T = 4\pi/\theta$ をもつ周期解である。従って, 周期 $2T (= 4\pi/\theta)$ または $T (= 2\pi/\theta)$ をもつ周期解によって安定領域, 不安定領域に区分される。

ここで, P_i^*, ω_i は次式より求められる。

$$[K_E] - \frac{P L^2}{EI} [S_q] = 0 \quad (18)$$

$$[K_E] - \frac{\gamma A L^2}{g EI} \omega^2 [M] = 0 \quad (19)$$

$P_i^* = \alpha_i EI/P$, $\omega_i^2 = \theta_i g EI / \gamma A L^2$ として整理すると, 式

$$(17) \text{ は } [K_E] - \alpha \alpha_i [S_q] \pm \frac{1}{2} b \alpha_i [S_q] - \frac{1}{4} c^2 \beta_i [M] = 0 \quad (20)$$

上式のデータミナントを0にする α を決定すると減衰を無視した主不安定領域が得られる。

4. 計算例

図-4に示す任意境界条件 (CASE(1)として両端Pin結合、CASE(2)として一端固定他端Pin結合、CASE(3)として両端固定) の長さ l のはり5つの要素に分割し主不安定領域、オス不安定領域を求めた。以下に示す計算結果は $\theta/2\omega_1$

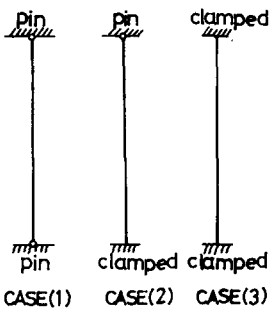


図-3

μ	$\theta/2\omega$			$\theta/2\omega$		
	(A)	(B)	(A)-(B)	(A)	(B)	(A)-(B)
	Bolotin	FEM	(A)	Bolotin	FEM	(A)
0.0	1.0	1.0	0.0 %	1.0	1.0	0.0 %
0.1	1.04881	1.04881	0.0	0.94867	0.94867	0.0
0.2	1.09544	1.09544	0.0	0.89442	0.89442	0.0
0.3	1.14018	1.14018	0.0	0.83666	0.83666	0.0
0.4	1.18321	1.18321	0.0	0.77459	0.77459	0.0

Principal region of instability

μ	$\theta/2\omega$			$\theta/2\omega$		
	(A)	(B)	(A)-(B)	(A)	(B)	(A)-(B)
	Bolotin	FEM	(A)	Bolotin	FEM	(A)
0.0	0.5	0.5	0.0 %	0.5	0.5	0.0 %
0.1	0.50083	0.50083	0.0	0.49497	0.49497	0.0
0.2	0.50332	0.50326	0.01	0.47958	0.47958	0.0
0.3	0.50744	0.50717	0.05	0.45277	0.45277	0.0
0.4	0.51316	0.51235	0.16	0.41231	0.41231	0.0

Second region of instability

表-1

(θ = 外力の振動数、 ω_1 = 1次の固有円振動数) と所粘パラメータと云われる次の量を用いて整理している。

$$\mu = \frac{P_c}{2c(P_c^* - P_c)} = \frac{b}{2c(1-a)}$$

又、CASE(1)~CASE(3)の(α_1, β_1)を(48)、(49)式より求めると

$$\text{CASE(1)} = (\alpha_1 = 0.39487, \beta_1 = 0.15589)$$

$$\text{CASE(2)} = (\alpha_1 = 0.80833, \beta_1 = 0.38055)$$

$$\text{CASE(3)} = (\alpha_1 = 1.58420, \beta_1 = 0.80178)$$

となる。表-1はCASE(1)の両端Pin結合のばり、主不安定領域、オス不安定領域の境界をFEM(5分割)で求め、Bolotinによる解と比較したものである。この表より少ない分割数であるが、よい精度でBolotinによる解と一致していることがわかる。

図-4は図-3の任意境界条件での主不安定領域、オス不安定領域を $\alpha = 0$ として求め、 $(\theta/2\omega_1 - \mu)$ 平面上に図示したもので、斜線領域が不安定領域を示す。この図より境界条件の相異に拘わらず両端Pin結合の不安定領域と同一になることがわかる。

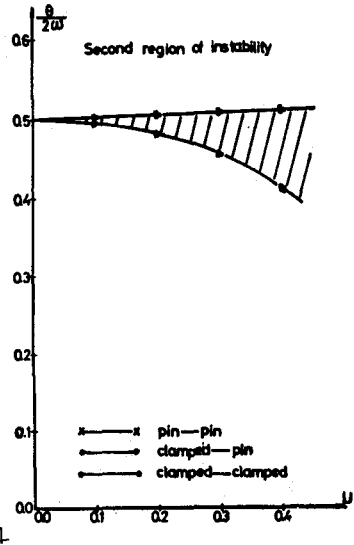
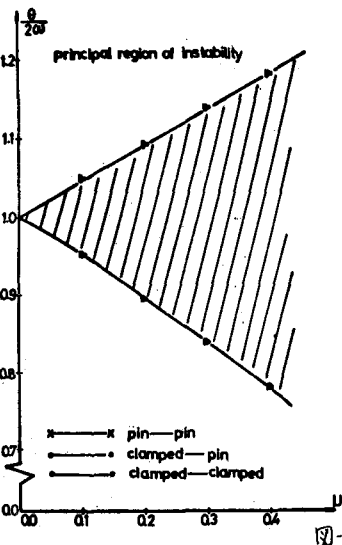


図-4

図-5はCASE(2)のばりの1次(ω_1)、2次(ω_2)、3次(ω_3)固有モードに対する不安定領域を $\alpha = 0$ として求めた図で、高次モードに移行する程不安定領域が狭小している。計算に用いた α_1, β_1 は α_1 は各モードに対して $\alpha_1 = 0.80833$

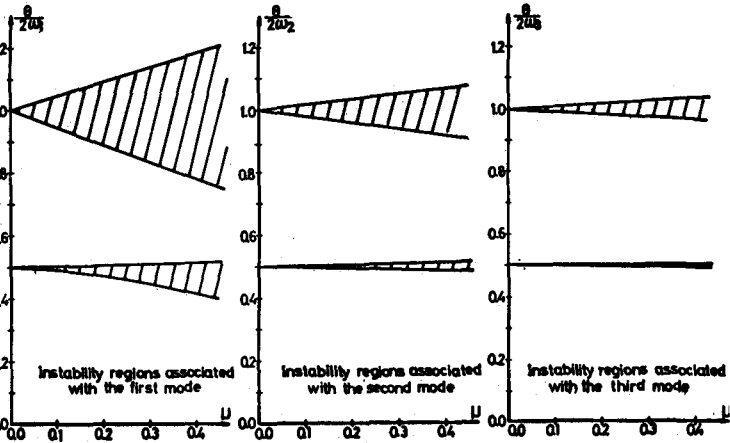


図-5

β_1 は $\beta_1 = 0.38055$, $\beta_2 = 4.01550$, $\beta_3 = 17.76260$ を用いた。

又、他の境界条件 (CASE(1), CASE(3))

について、図-5で置き換えられることが計算結果として得られている。

図-6 は CASE(2) の主不安定領域を種々の α (0.0, 0.2, 0.4, 0.6) に対して求めたものである。

動的安定問題での減衰力の存在は不安定領域を減らす働きがあることは知られている。図-7 に CASE(1) の両端 Pin 結合のほりの減衰力を考慮した主不安定領域を示す。減衰力はほり全体に一样に作用するものとし、減衰定数 $h=0.05$, $h=0.1$ の場合を求めた。図より減衰力の存在は、不安定領域を狭くさせる働きが大きく、縦軸 ($\theta/2\omega$) に接する不安定領域が切り離される程度パラメータ μ の小さいところでは、不安定現象は起こらない。

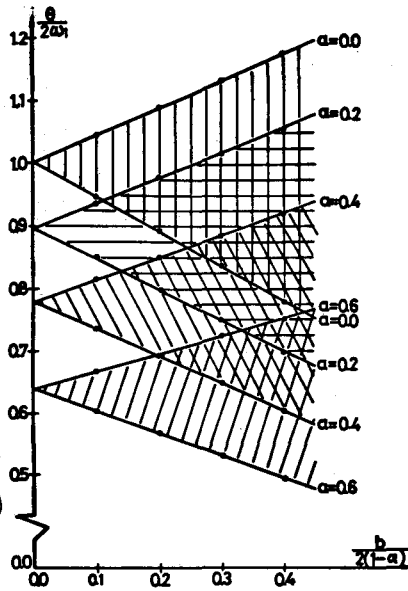


図-6

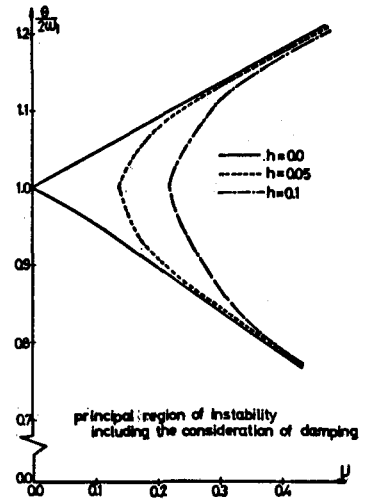


図-7

結び

- 1) 有限要素法による解と厳密解である Bolotin らによる両端 Pin 結合のほりの主不安定領域、すなわち不安定領域は少ない分割数にも拘らず誤差なく一致している。
- 2) 1 端固定 - 他端 Pin 結合、両端固定のほりとも、主不安定領域、すなわち不安定領域は、両端 Pin 結合のほりと一致している。
- 3) 減衰の不安定領域に及ぼす影響は、加振パラメータ μ の小さい領域での影響が大きい。

参考文献

- 1) Bolotin, V.V., The Dynamic Stability of Elastic systems, Holden-Day, Inc, San Francisco, 1964