

ロングストリップエレメント法によるシャイベの波動伝播について

北大 工学部 正員 能町 純雄
 正員 角田 与史雄
 学生員 〇岸 徳光

1. はじめに.

静的な変位せん断公式は多くの構造解析に用いられている. その誘導の仮定に慣性力を導入すると動的変位せん断公式を求めることができる. この動的変位せん断公式の適用法と精度の検討するために, 矩形断面梁を2次元弾性振動問題として取り上げ, 有限なフーリエ変換を応用して厳密解を求めた.

2. 有限なフーリエ変換を応用した厳密解の誘導

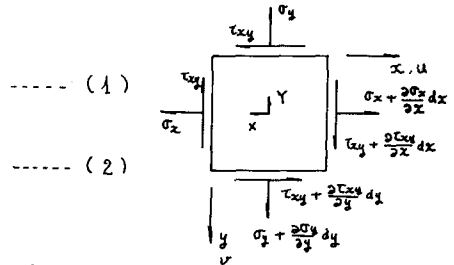
fig. 1 のような, 矩形断面梁の任意微小要素を取り出して, 応力度の釣合いを考える.

x 方向, y 方向の垂直応力度を σ_x, σ_y , 変位を u, v とし, 剪断応力度を

τ_{xy} とすると, x 方向, y 方向の釣合式は,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{----- (2)}$$



平面応力状態における応力と歪の関係式は,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{--- (3)}$$

ここで, 変位は, 調和振動と仮定し, 角速度を ω とすると, $\delta = \Delta \sin \omega t$ となる.

(3) を用いて, (1) に $\cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$, (2) に $\sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$ の変換を施し, 部分積分をこのよう. 境界条件に留意しながら変換式を解いて $C_m S_n[U]$, $S_m C_n[V]$ を求め逆変換すると, 変位は,

$$U = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ Q_1(\eta) C_m[U_i] + Q_1(1-\eta) C_m[U_j] \right. \\ \left. + (1+\nu) \left(\frac{mb}{a} \right)^2 \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ Q_1(\eta) - Q_2(\eta) \} C_m[U_i] + \{ Q_1(1-\eta) - Q_2(1-\eta) \} C_m[U_j] \right] \right. \\ \left. - \frac{1+\nu}{2G} \left(\frac{mb}{a} \right)^2 \frac{1}{\pi \lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ Q_1(\eta) - Q_2(\eta) \} S_m[\sigma_{yi}] + \{ Q_1(1-\eta) - Q_2(1-\eta) \} S_m[\sigma_{yj}] \right] \right\} \quad \text{--- (4)}$$

$$V = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ \frac{mb}{a} \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_1(\eta) C_m[U_i] - \xi_1(1-\eta) C_m[U_j] \right] - \frac{b}{G} \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_1(\eta) S_m[\sigma_{yi}] - \xi_1(1-\eta) S_m[\sigma_{yj}] \right] \right. \\ \left. - (1+\nu) \left(\frac{mb}{a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ \lambda_1 \xi_1(\eta) - \lambda_2 \xi_2(\eta) \} C_m[U_i] - \{ \lambda_1 \xi_1(1-\eta) - \lambda_2 \xi_2(1-\eta) \} C_m[U_j] \right] \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{2G} \left(\frac{b}{\pi} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ \lambda_1 \xi_1(\eta) - \lambda_2 \xi_2(\eta) \} S_m[\sigma_{yi}] - \{ \lambda_1 \xi_1(1-\eta) - \lambda_2 \xi_2(1-\eta) \} S_m[\sigma_{yj}] \right] \right\} \quad \text{--- (5)}$$

但し, $\eta = y/b$, $C_m[U] = \int_0^a U \cos \frac{m\pi}{a} x dx$, $S_m[\sigma_y] = \int_0^a \sigma_y \sin \frac{m\pi}{a} x dx$, $\lambda_1^2 = \left| \left(\frac{mb}{a} \right)^2 - \frac{\rho b^2}{G} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right|$, $\lambda_2^2 = \left| \left(\frac{mb}{a} \right)^2 - \frac{\rho b^2}{E} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right|$

$$Q_1(\eta) = \frac{\cosh \pi \lambda (2-\eta) - \cosh \pi \lambda \eta}{\cosh 2\pi \lambda - 1} \quad \xi(\eta) = \frac{\sinh \pi \lambda (2-\eta) + \sinh \pi \lambda \eta}{\cosh 2\pi \lambda - 1}$$

このようにして求められた変位を (3) に代入することにより、各応力が求まる。点の応力を全体座標系で示すと、

$$\begin{aligned} S_m[\sigma_{yi}] &= -C_3 C_m[U_i] + C_1 S_m[V_i] - C_4 C_m[U_j] - C_2 S_m[V_j] \\ C_m[\tau_{xyi}] &= C_5 C_m[U_i] - C_3 S_m[V_i] - C_6 C_m[U_j] + C_4 S_m[V_j] \end{aligned} \quad \text{----- (6)}$$

たわみ振動、縦振動の固有方程式は、それぞれ（固有値をせん断波速度に対する比で示す）

(a). たわみ振動

境界条件として $U_i = -U_j$, $V_i = V_j$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} -C_3 + C_4 & C_1 - C_2 \\ C_5 + C_6 & -C_3 + C_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{--- (7)}$$

整理して

$$\frac{\cosh \frac{\pi \lambda_1}{2}}{\cosh \frac{\pi \lambda_2}{2}} = \frac{4 \sqrt{(1-\nu^2) \{1 - (\frac{\nu}{\nu_p})^2\}}}{(\nu^2 - 2)^2} \quad \text{--- (8)}$$

($\nu < 1$)

(b). 縦振動

境界条件として $U_i = U_j$, $V_i = -V_j$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} -(C_3 + C_4) & C_1 + C_2 \\ C_5 - C_6 & -(C_3 + C_4) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{--- (9)}$$

整理すると

$$\frac{\tanh \frac{\pi \lambda_1}{2}}{\tanh \frac{\pi \lambda_2}{2}} = \frac{4 \sqrt{(1-\nu^2) \{1 - (\frac{\nu}{\nu_p})^2\}}}{(\nu^2 - 2)^2} \quad \text{--- (10)}$$

($\nu < 1$)

となり、くりがえし計算により解を求める。

3. 動的な変位せん断公式の誘導.

静的な変位せん断公式については多くの研究成果がある。動的な変位せん断公式についても、まったく同様の方法で誘導できる。

変位を線形変化と仮定して $U = U_i(1-\tau) + U_j\tau$, $V = V_i(1-\tau) + V_j\tau$ とおき、(1)、(2)、(3) を用いて解くと、応力は、全体座標系において、

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} - \nu^2[M]\{\Delta\} \quad \text{---- (11)}$$

となる。

但し

$$\{F\}^T = \{ C_m[\tau_{xyi}] \quad S_m[\sigma_{yi}] \quad C_m[\tau_{xyj}] \quad S_m[\sigma_{yj}] \}$$

$$\{\Delta\}^T = \{ C_m[U_i] \quad S_m[V_i] \quad C_m[U_j] \quad S_m[V_j] \}$$

$$[K] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{b_i}{3(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{2b_i} & \frac{1-3\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right) & \frac{b_i}{6(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{1}{2b_i} & \frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \\ & \frac{b_i}{6} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{(1-\nu)b_i} & -\frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right) & \frac{b_i}{12} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{1}{(1-\nu)b_i} \\ & & \frac{b_i}{3(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{2b_i} & -\left(\frac{m\pi}{a}\right) \frac{1-3\nu}{4(1-\nu)} \\ & & & \frac{b_i}{6} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{b_i(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Symm.

$$[M] = \frac{\rho b l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b_l : エレメント幅
 a : スパン長

(11) より動的変位せん断公式が得られたが、これを固有値問題に適用すると、

$$[K] - \rho^2 [M] = 0 \quad (12)$$

となり、比較的簡単に固有値、固有ベクトルが得られる。矩形梁をロングストリップに分割する場合は、(11) を各エレメントに適用して、全体の剛性マトリクス、質量マトリクスを求め、同様の操作を行うとよい。この方法によると、 n 節点の場合、 $2n$ 個の固有値が得られる。

4. 計算結果

厳密解とロングストリップエレメント法による解（分割数 $N=10$ について）をポアソン比 0.3 の場合について示した。fig. 2.3 は、たわみ振動と、縦振動についての波動伝播の分散曲線を示し、fig. 4.5 には、代表的なモードを示した。以上より、動的な変位せん断公式を用いたロングストリップエレメント法は分割を多くすることにより、厳密解に十分近似できることがわかった。

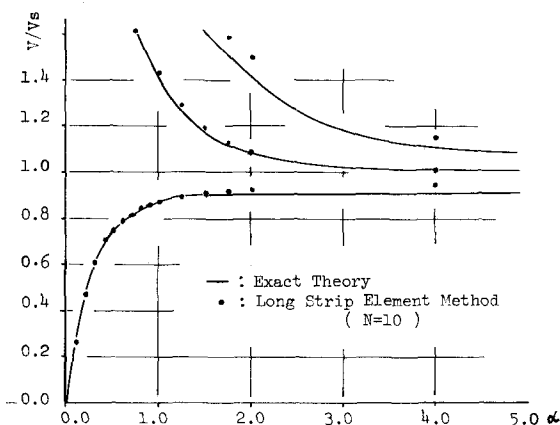


Fig.2 Dispersion Diagram of Transverse Vib.
 α : the ratio of scheibe-height and wave-length

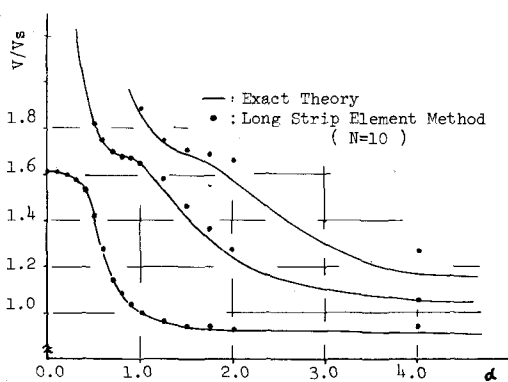


Fig.3 Dispersion Diagram of Longitudinal Vib.

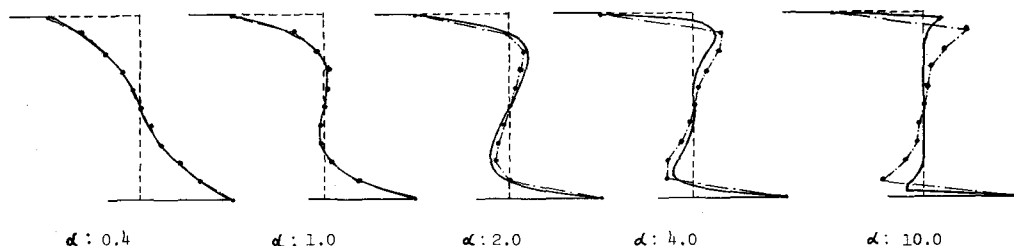


Fig.4 Transverse Vib. Mode

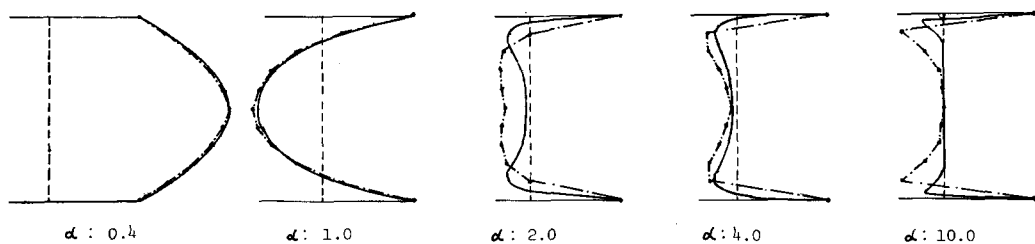


Fig. 5 Longitudinal Vib. Mode

参考文献

- 1). 能町 秋雄. "平板及び平面弾性問題に対する有限なフーリエ変換の応用" 室工大研究報告, 昭31.
- 2). "剛なダイヤフラムを等区画に分けられる薄肉長方形箱桁の曲げねじりについて" 土木学会論文集, 第146号, 昭42.10.
- 3). J. Prescott. "Elastic Waves and Vibrations of Thin Rods" Phil. Mag. Vol 35, ser 7, 1942