

軸方向にヒンデで結合されたタイ・ロッドを有する 矢板の応力解析について

北海道大学 正員 能町純雄
苫小牧高専 〇正員 沢田知之

1. 序 文

本稿は、筆者等が先に発表した、タイ・ロッドを有する矢板構造¹⁾が、背面の土圧を根入部分とタイ・ロッドによって受け持つ場合をモデル化して理論解析したものを述べるものである。解析にあたっては、各々矢板要素は剛性を保ち節点はヒンデ結合されているとし、曲げ及び捩りモーメントのつり合いから変位と軸廻りの回転変位を求め、節点での力のつり合いを満足する微分差分方程式に、定積分変換及びフーリエ変換を行ない、境界条件を満足するように境界値を定めて必要とする節点変位、断面力を得る。

2. 一般式

図-1の一般式に示す如く、矢板長 l_2 の内、天端より x_0 の点にタイ・ロッドがあり、全矢板長 l の内 l_1 までは、三角分布土圧の作用する棒状要素として解き、 l_2 の部分は受働土圧が作用する故、主働土圧と受働土圧との差を等分布とした弾性床土の梁として解析を進め、 l_1 と l_2 との連続の条件及び境界条件によって境界値を決定する。

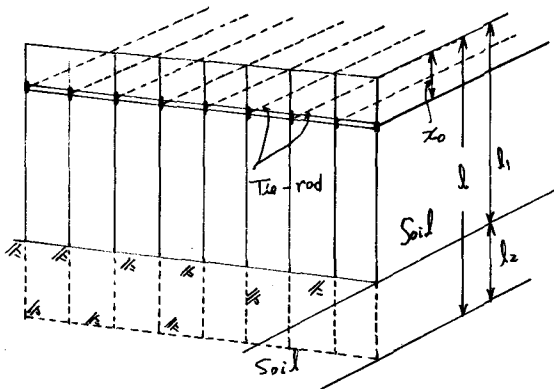


図-1 (一般図)

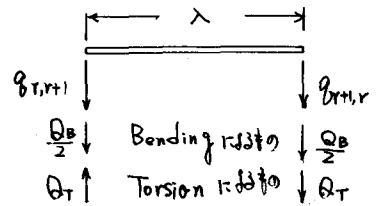


図-2
(矢板要素)

2-1. 根入れより上の部分における基本式

矢板要素図-2より、鉛直方向の曲げと捩りから

$$\frac{EI}{4} \left\{ \Delta^2 \ddot{w}_r(x) + 4 \ddot{w}_r(x) \right\} + \frac{GJ}{\lambda^2} \Delta^2 \ddot{w}_r(x) = P \quad (1)$$

$w_r(x)$: 矢板の変位

λ : 矢板幅

K : バネ定数

w_1° : タイ・ロッドの変位

$$P = P_{tie} + P_{soil} \quad P_{tie} \text{ は } \begin{cases} x = x_0 \text{ の } P_{tie} \\ x \neq x_0 \text{ の } 0 \end{cases}$$

Tie-rod を固定する水平方向梁における三連モーメント式より

$$P_{tie} = \frac{\Delta^2 M_{r-1}}{\lambda} - K \cdot w_1^\circ \quad (2)$$

$$\frac{\lambda^2}{6EI_0} (6M_r^\circ + \Delta^2 M_{r-1}) = -\Delta^2 w_1^\circ \quad (3)$$

(1) (2) (3) 式に Fourier-Sine 定和分変換を施す。

$$\frac{EI}{4} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x) \} - D_i \ddot{w}_i(x) + 4 \ddot{w}_i(x) \right] + \frac{GJ}{\lambda^2} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x) \} - D_i \ddot{w}_i(x) \right] = \bar{P}_{soil} + \bar{P}_{tie} \quad (4)$$

$$\bar{P}_{tie} = \frac{1}{\lambda} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i M_n - M_0 \} - D_i \bar{M}_i \right] - K \cdot w_i^0 \quad (5)$$

$$\frac{\lambda^2}{6EI_0} \left[6M_i^0 - \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i M_n^0 - M_0^0 \} - D_i \bar{M}_i^0 \right] = - \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i w_{in}^0 - w_{i0}^0 \} - D_i \bar{w}_i^0 \right] \quad (6)$$

(4) (5) (6) で $x=0$, n 端で Simple-Support とする

(5) (6) より

$$\bar{P}_{tie} = \left\{ -\frac{1}{\lambda} \cdot D_i \frac{6EI_0 \cdot D_i}{(6-D_i) \cdot \lambda^2} - K \right\} \cdot \bar{w}_i^0 = F_i \cdot \bar{w}_i^0 \quad (7)$$

(4) において $x=0$ (天端) で Free, $x=l_1$ 点で l_2 の部分と接続するとして Fourier-Sine 変換を行なう。

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{ii}(x) = & \frac{\left\{ \frac{\pi^3(4-D_i)EI}{4l_1^3} \cdot m^3 + \frac{\pi GJ D_i}{\lambda^2 l_1} \cdot m \right\} \cdot \bar{w}_{ii}(0) + \left\{ \frac{\pi}{l_1} (1 - \frac{D_i}{4}) EI (-1)^m m \right\} \cdot \ddot{w}_{ii}(l)}{EI (1 - \frac{D_i}{4}) \left(\frac{\pi}{l_1} \right)^4 \left\{ m^4 + \frac{D_i \cdot GJ}{\lambda^2 EI (1 - \frac{D_i}{4}) \pi^2} \cdot m^2 \right\}} \\ & + \frac{- \left\{ \frac{\pi^3(4-D_i)EI}{4l_1^3} \cdot m^3 + \frac{\pi GJ D_i}{\lambda^2 l_1} \cdot m \right\} (-1)^m \bar{w}_{ii}(l) + \bar{P}_{soil} + F_i \bar{w}_{i0} \sin \frac{m\pi}{l_1} x_0}{\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}} \quad (8) \end{aligned}$$

故に (8) 式に Fourier-Sine 逆変換を行ない整理すると

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ii}(x) &= \frac{2}{l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{w}_{ii}(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{l_1} x \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \cdot \bar{w}_{ii}(0) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \cdot \bar{w}_{ii}(l) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^4 + A m^2} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \\ &\quad \times \frac{l_1^2}{\pi} \cdot \ddot{w}_{ii}(l) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4 + A m^2} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l_1} x_0 \cdot C \cdot F_i \cdot \bar{w}_i^0 - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4 + A m^2} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \cdot C \cdot \bar{P}_{soil} \\ \therefore & A = \frac{l_1^2 D_i 4 GJ}{\pi^2 \lambda^2 (4-D_i) EI}, \quad a = \sqrt{A}, \quad C = \frac{l_1^3 4}{\pi^3 (4-D_i) EI}, \quad D_i = 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{w}_{ii}(x) &= \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) \cdot \bar{w}_{ii}(0) + \frac{x}{l_1} \cdot \bar{w}_{ii}(l) + \frac{l_1^2}{\pi^2 a^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi a}{l_1} x}{\sinh \pi a} - \frac{x}{l_1} \right) \cdot \ddot{w}_{ii}(l) \\ &\quad + C \cdot F_i \oint(x, x) \cdot \bar{w}_i^0 + C \cdot L(x) \cdot \bar{P}_{soil} \cdot l_1 \quad (10) \end{aligned}$$

(10) 式において

$$\phi(x, x_0) = \begin{cases} \frac{\pi x (l_1 - x_0)}{a^2 l_1^2} - \frac{\sinh \pi a \frac{x}{l_1} \cdot \sinh \pi a (1 - \frac{x_0}{l_1})}{a^3 \sinh \pi a} & x \leq x_0 \\ \frac{\pi x_0 (l_1 - x)}{a^2 l_1^2} - \frac{\sinh \pi a \frac{x_0}{l_1} \cdot \sinh \pi a (1 - \frac{x}{l_1})}{a^3 \sinh \pi a} & x \geq x_0 \end{cases}$$

$$L(x) = \frac{\pi^3 x \cdot (l_1^2 - x^2)}{6 l_1^3 a^2} + \frac{1}{\pi a^4} \cdot \left(\frac{\sinh \frac{\pi a}{l_1} x}{\sinh \pi a} - \frac{x}{l_1} \right)$$

2-2. 根入れ部分における基本式

土との相互作用がバネを介して行なわれると考えると

$$\frac{EI}{4} \{ \Delta^2 \bar{w}_{2r-1}(x) + 4 \bar{w}_{2r}(x) \} + \frac{GJ}{\lambda^2} \Delta^2 \bar{w}_{2r-1}(x) + \frac{K_0}{6 \lambda^2} \{ \Delta^2 \bar{w}_{2r-1}(x) + 6 \bar{w}_{2r}(x) \} = 0 \quad (11)$$

故に, Fourier-Sine 定積分変換を行ない $r=0, \pi$ で Simple-Support とすると

$$(4 - D_i) \cdot \bar{w}_{2i}(x) - \frac{4GJ D_i}{EI \lambda^2} \cdot \bar{w}_{2i}(x) + \frac{4K_0}{EI \lambda^2} \left(1 - \frac{D_i}{6} \right) \cdot \bar{w}_{2i}(x) = 0 \quad (12)$$

よって, (12) に x 方向に Fourier-Sine 変換を行ない, 今 l_2 端で Free であるとするとき,

$$\bar{w}_{2i}(l_2) = 0 \quad (13)$$

故に逆変換を行なって整理すると,

$$\begin{aligned} \bar{w}_{2i}(x) = & -\frac{1}{2\alpha\beta} \frac{l_2^2}{\pi^2} P(\xi) \cdot \bar{w}_{2i}(0) + \left\{ Q(\xi) - \frac{A1}{4\alpha\beta} P(\xi) \right\} \cdot \bar{w}_{2i}(0) \\ & - \left\{ Q(1-\xi) - \frac{A1}{4\alpha\beta} P(1-\xi) \right\} \cdot \bar{w}_{2i}(l_2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ここで, } P(\xi) = \frac{\sinh d\pi(2-\xi) \cdot \sin \beta\pi\xi - \sinh d\pi\xi \cdot \sin \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2d\pi - \cos 2\beta\pi} \quad \xi = \frac{x}{l_2}$$

$$Q(\xi) = \frac{\cosh d\pi(2-\xi) \cdot \cos \beta\pi\xi - \cosh d\pi\xi \cdot \cos \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2d\pi - \cos 2\beta\pi}$$

$$A1 = \frac{l_2^2}{\pi^2} \frac{GJ \cdot D_i}{(1 - \frac{D_i}{6}) EI \lambda^2}$$

$$B1 = \frac{l_2^4}{\pi^4} \frac{K_0 (1 - \frac{D_i}{6})}{EI (1 - \frac{D_i}{6})}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{A1 + 2\sqrt{B1}}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-A1 + 2\sqrt{B1}}}{2}$$

3. 連続条件 及び 境界条件

連続条件は次の4式で示される。

$$\bar{w}_{1i}(l_1) = \bar{w}_{2i}(0) \quad (15) \quad \dot{\bar{w}}_{1i}(l_1) = \dot{\bar{w}}_{2i}(0) \quad (16) \quad \ddot{\bar{w}}_{1i}(l_1) = \ddot{\bar{w}}_{2i}(0) \quad (17)$$

$$\bar{w}_{1i}(l_1) = \bar{w}_{2i}(0) \quad (18) \quad (15), (17) \text{ は } \text{こう置き, 次に示す3つの境界条件より}$$

導かれる式を整理すると,

$$1). x = x_0 \text{ での Tie-rod と sheet-pile の変位は一致する。} \quad (19)$$

$$2). x = 0 \text{ での剪断力はない。} \quad (20)$$

$$3). x = l_2 \text{ での剪断力はつり合う。} \quad (21)$$

よって(16)(18)(19)(20)(21)の5式を整理すると次の如く示される。

$\frac{1}{l_1}, -CF_1\phi'(x_0, l_1), -\frac{1}{l_1}\{Q(0)+\frac{A_1}{4\beta}P(0)\}, -\{Q(1)+\frac{A_1}{4\beta}P(1)\}, -\frac{(l_1)^2}{(\pi a)^2}\left\{\frac{\pi a \cos k\pi a}{l_1 \sin k\pi a}-1\right\}-\frac{l_1^2 P(0)}{2\beta\pi^2},$	$\bar{w}_1(0)$	$-CL(0)\bar{P}_{0,1}l_1$
$0, -CF_1\phi''(x_0, l_1), \{Q(0)+\frac{A_1}{4\beta}P(0)\}, -\{Q(1)+\frac{A_1}{4\beta}P(1)\}, -\frac{\pi a \cos k\pi a}{l_1 \sin k\pi a}-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{l_1}{\pi}\right)^2 P(0),$	$\bar{w}_1''(0)$	$CL''(0)\bar{P}_{0,1}l_1$
$(1-\frac{x_0}{l_1}), CF_1\phi(x_0, x_0)-1, \frac{x_0}{l_1}, 0, \left(\frac{l_1}{\pi a}\right)^2\left\{\frac{\pi a \cos k\pi a}{l_1 \sin k\pi a}-1\right\}-\frac{x_0}{l_1},$	$\bar{w}_{2,0}(0)$	$-CL(x_0)\bar{P}_{0,1}l_1$
$\frac{GJD_1}{\lambda l_1}, \frac{EI}{4}(4-D_1)CF_1\phi(x_0, x_0), -\frac{GJ}{\lambda^2}D_1 CF_1\phi(x_0, x_0), 0, EI(1-\frac{D_1}{4})\frac{\pi a}{l_1 \sin k\pi a}\frac{GJD_1}{\lambda^2}\left(\frac{l_1}{\pi a}\right)^2 \times \left(\frac{\pi a}{l_1 \sin k\pi a}-1\right),$	$\bar{w}_{2,0}(l_1)$	$\{EI(1-\frac{D_1}{4})CL'(0) + \frac{GJ}{\lambda^2}D_1 CL(0)\}\bar{P}_{0,1}l_1$
$0, 0, -\frac{GJ}{\lambda^2}D_1\{Q(0)+\frac{A_1}{4\beta}P(0)\}, +\frac{GJD_1}{\lambda^2}\{Q(0)+\frac{A_1}{4\beta}P(0)\}, +\frac{GJ}{\lambda^2}D_1\left(\frac{l_1}{\pi}\right)^2 P(0),$	$\bar{w}_{2,0}''(0)$	0

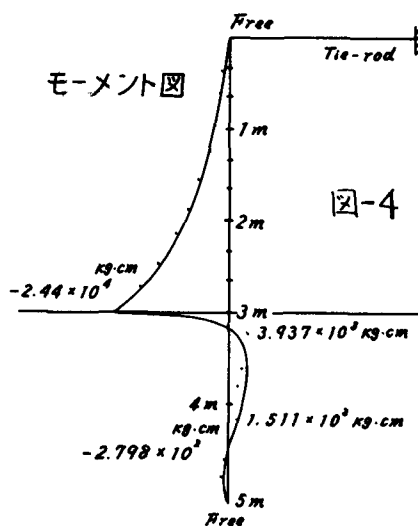
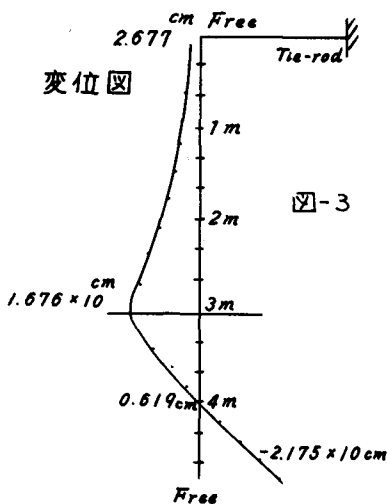
故に(22)式より境界値を求め、次に示すFourier-Sine定和変換公式より、変位を知り得る。

$$w_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{1,n}(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{\lambda} x \quad (23)$$

$$w_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{2,n}(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{\lambda} x \quad (24)$$

4. 数値計算例

今、スリット長5m, $l_1=3m, l_2=2m, \lambda=50cm, K=100kg/cm, K_0=3kg/cm, E=2.1 \times 10^6 kg/cm^2, I=4.167 \times 10^{-8} cm^4, G=8.0 \times 10^5 kg/cm^2, J=16.67 \times 10^{-8} cm^4$ なる矢板について、変位図、モーメント図を各々図-3, 図-4に示す。



※ 尚本理論計算は北大大型計算センターのFACOM-230-60を用いて行なった。又、本研究は、北海道科学研究補助金の交付を受けて行なったことを附言とする。

※ 参考文献

- 1) タイロッドを有する矢板の応力解析について：能町松岡 天田(板鋼年次講演会要集) 2) 矢板の側方不定構造解析：能町松岡 天田(板鋼年次講演会要集)