

折板理論の合成桁解析への適用に関する一考察について

北海道大学工学部 正会員 荻澤 憲吉

1. まえがき

平面板および曲面板が互いに連結接合して一つの複合構造物を構成している場合、その構造物の変形、応力状態などを解明する上で、折板理論は有用な解法として位置づけられる。この理論は、例えば、曲線桁橋構造について述べれば、上、下床版および上下のフランジ板を扇形板と考え、腹板を円筒シエル（または円錐シエル）と考えて、それらを構造物の要素（板要素）とし、板要素の接合状態を境界条件として解き、その内部の変形および応力を得る解法である。この理論において、板要素の変形や応力は板の弾性理論の厳密解から直接に得られるのであるが、それらの変形や応力は、板の中央面に関するものであって、板要素の接合部における接合状態を論じる場合、互いの中央面の交線上で論じるのが一般的である。

ところで、合成桁構造の床版と主桁の接合の状態を考えると、コンクリート床版と主桁の上フランジ板とは、すれ止めによって（線状ではなく）面状に接合されており、またさらに、床版の中央面と上フランジ板の中央面は一致していない。このために、合成桁構造を解析する場合、今までの折板理論を単純に適用することができない。そこで、床版と主桁の接合などのように考え、理想化するが、一つの重要な問題となる。

この論文は、上記の問題について検討を行ない、合成桁橋の構造解析に折板理論を適用する際の手法について述べ、同理論の拡張を試みたものである。

2. 折板理論の概要

ここにおいては、面外変形と面内変形とともに考慮した折板理論の概要を述べる。（わしくは文献1）を参照されたい。

(a) 板要素の撓性マトリクスの誘導 構造物を構成する床版、フランジ板、腹板などの一フーフを板要素として、それらの変形および応力状態を表わす基礎微分方程式を、矩形板、扇形板に対しては、弾性曲面に関する *Platte* の微分方程式（面外変形）と応力関数を用いた *Scheibe* の微分方程式（面内変形）とし、また円筒シエルに対しては、*Donnell* の平衡条件式とする。これらの微分方程式の解を桁軸方向にフーリエ級数展開した形に仮定し、桁の端部において単純支持の条件を満足するように決定する。さらに、板要素の自由辺において、曲げモーメント、反力、直応力、接線力の4つの力と、回転角を含めた4つの変位を定義し、それらを級数展開した形に仮定すると、その級数の係数の間における関係がそれぞれの板要素ごとに次のように誘導される。

$$\{\delta\} = [B]\{X\} + \{\delta_p\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\{\delta\}$ は自由辺における変位の係数のマトリクス、 $\{X\}$ は自由辺における力の係数のマトリクス、さらに $\{\delta_p\}$ は板面に垂直方向の分布荷重が作用した場合に生じる自由辺の変位の係数のマトリクスであって、ともに (8×1) の大きさである。また、 $[B]$ は自由辺の変位と自由辺の力を関係づける (8×8) マトリクスで、板の撓性マトリクスである。

(b) 接合条件 板要素の接合部（図-1）においては、応力の釣合（4方向）と変位の適合（4方向）が条件となり、それを満足するように方程式を導くと、

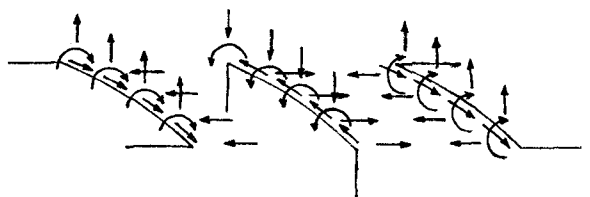
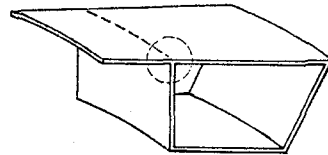


図-1 接合部の応力と変位

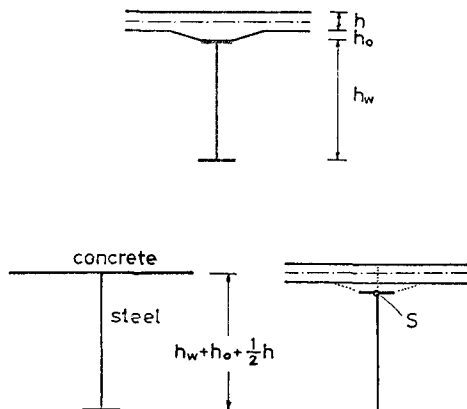
各々の板要素の接性マトリクスの重ね合わせによって、最終的に構造全体の接性マトリクスが得られる。これから、マトリクス演算により、それぞれの板要素の接合面に作用している力が決定され、板要素の内部の変形や応力状態が決定される。

以上の手順は、変形と応力を級数展開していることにより、接合部の桁軸方向の全域にわたって変位の適合と応力の釣合を満足させることができる。また、床版に直接荷重が作用している場合も解析できる。

3. 合成桁橋の解析

(a) 床版と主桁の接合の検討 合成桁橋と折板理論

で解析する一方法は、K. H. Chu と S. G. Pinjarkar の論文²⁾の中にふれられている。それは、主桁の上フランジ板の効果を見出し、腹板を床版の中央面まで延長し、図-2(a)のように簡易化して解析する方法である。この方法によれば、床版と腹板の中央面の交線上で接合条件を考慮することができるので、折板理論を単純に適用できることになる。しかし、上フランジ板の効果を見出し、鋼の腹板をコンクリート床版の内部にまで延長するという考え方には、無理があるのではないかと考えられる。



(a) Chu's method (b) proposed method

図-2 合成桁断面の理想化

したがって、コンクリート床版の板厚が、鋼のフランジ板や腹板の板厚より著しく厚いことを考慮して、床版と主桁の接合条件を考慮する位置は、両者の接触部とすべきであると考えられる。すなわち、折板理論による合成桁解析においては、図-2(b)のように、上フランジ板と腹板および床版の下面の交点Sにおいて考えるのが合理的であろう。この場合、左右の床版、左右の上フランジ板および腹板の計4個の板要素が点Sで接合しているものとして取扱われる。この時、上フランジ板および腹板については、板厚は微小であるから、点Sにおいて伝達される力は板の中央面に作用する力として差しつかえないが、床版については、中央面よりはずれた位置における力と変位を関係づける接性マトリクスが必要となる。また、この解析方法によれば、上フランジ板と床版との変位の適合は、フランジの幅は一般に狭いので板幅全域にわたって、点Sより離れた位置においてもほぼ満足されるであろうと思われる。

(b) 床版における力および変位の交換 床版の中央面に作用する力と、床版と上フランジ板との接触面に作用する力との間の相互変換式および変位の間の相互変換式を誘導する。

まず、コンクリート床版のハンチ部の断面を見出し、床版は等厚板として解析され、中央面は上、下面の中央にあるものとする。図-3に示されるように、中央面における力 X と変位 δ 、および接触面における力 Y と変位 η を定義し、それらを次の形に考える。

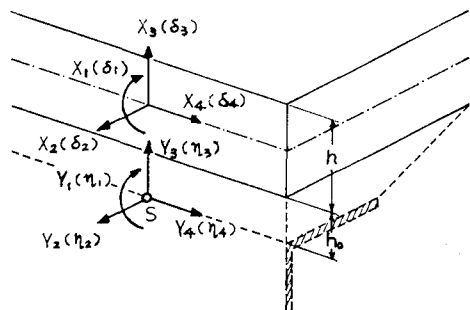


図-3 中央面の応力(変位)と接触面の応力(変位)

$$\left. \begin{array}{llll} X_1: X_{1n}(D/l) \sin \omega t & \delta_1: \delta_{1n} \sin \omega t & Y_1: Y_{1n}(D/l) \sin \omega t & \eta_1: \eta_{1n} \sin \omega t \\ X_2: X_{2n}(Elh) \sin \omega t & \delta_2: \delta_{2n} \sin \omega t & Y_2: Y_{2n}(Elh) \sin \omega t & \eta_2: \eta_{2n} \sin \omega t \\ X_3: X_{3n}(D/l^2) \sin \omega t & \delta_3: \delta_{3n} \sin \omega t & Y_3: Y_{3n}(D/l^2) \sin \omega t & \eta_3: \eta_{3n} \sin \omega t \\ X_4: X_{4n}(Elh) \cos \omega t & \delta_4: \delta_{4n} \cos \omega t & Y_4: Y_{4n}(Elh) \cos \omega t & \eta_4: \eta_{4n} \cos \omega t \end{array} \right\} \dots\dots(2)$$

ここで、 D : 床版の曲げ剛性、 l : 任意の基準長、 E : ヤング率、 lh : 床版の板厚、であり、 X_{kn}, Y_{kn} ($k=1\sim 4$) は無次元量、 δ_{kn}, η_{kn} ($k=2\sim 4$) は l で除された無次元変位である。また、 ω, t は、

床版が扇形板の場合、 $\omega = n\pi/\varphi_0$, $t = \varphi$ ($n=1, 2, 3, \dots$, φ_0 : 扇形板の開き角、 φ : 桁軸方向座標)

床版が矩形板の場合、 $\omega = n\pi/a$, $t = y$ ($n=1, 2, 3, \dots$, a : 桁軸方向長、 y : 桁軸方向無次元座標)

である。さて、床版の中央面の力を接触面の力に変換すると次のようになる。

$$Y_{1n} = X_{1n} - X_{2n} \cdot \delta_1, \quad Y_{2n} = X_{2n}, \quad Y_{3n} = X_{3n} - X_{4n} \cdot \omega \delta_2, \quad Y_{4n} = X_{4n} \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 δ_1, δ_2 は、扇形板の場合、 $\delta_1 = 6(1-\nu^2)(h+2h_0)/h^2$, $\delta_2 = 6(1-\nu^2)(h+2h_0)/h^2/r_0$ 、であり、

矩形板の場合、 $\delta_1 = \delta_2 = 6(1-\nu^2)(h+2h_0)/h^2$ である。ここにおいて、 h_0 : ハンチ高、 ν : ポアソン比、 r_0 : 扇形板の場合の考えている断面の曲率半径 (l との比を考慮することにより無次元) である。

また、床版の中央面の変位は、接触面の変位に次のように変換される。

$$\eta_{1n} = \delta_{1n}, \quad \eta_{2n} = \delta_{2n} + \delta_{1n}(h+2h_0)/2, \quad \eta_{3n} = \delta_{3n}, \quad \eta_{4n} = \delta_{4n} + \delta_{3n} \cdot \delta_3(h+2h_0)/2 \quad \dots\dots(4)$$

ここで、 δ_3 は、扇形板の場合、 $\delta_3 = \omega/r_0$ 、矩形板の場合、 $\delta_3 = \omega$ である。

一才、逆に接触面の力と変位を中央面の力と変位に変換すると、

$$X_{1n} = Y_{1n} + Y_{2n} \cdot \delta_1, \quad X_{2n} = Y_{2n}, \quad X_{3n} = Y_{3n} + Y_{4n} \cdot \omega \delta_2, \quad X_{4n} = Y_{4n} \quad \dots\dots(5)$$

$$\delta_{1n} = \eta_{1n}, \quad \delta_{2n} = \eta_{2n} - \eta_{1n}(h+2h_0)/2, \quad \delta_{3n} = \eta_{3n}, \quad \delta_{4n} = \eta_{4n} - \eta_{3n} \delta_3(h+2h_0)/2 \quad \dots\dots(6)$$

となり。これらの式を用いると、式(1)における床版の中央面の力と変位に関する接性マトリクスを、接触面における力と変位に関する接性マトリクスに変換でき、したがって、床版と主桁の接触面において変位の適合と応力の釣合を考えた合成桁の解析が可能となる。

4. 数値計算例

以上に述べた手法によって合成桁を解析した結果を示す。まず、数値解析を行なった合成桁断面を図-4に示す。ここで、合成桁橋は単純支持桁とし、支持端において、面内方向に対して剛、面外方向の力に対しては抵抗しないタイアフレームを有しているものと仮定する。また、床版のコンクリートのポアソン比を、0.17、鋼のポアソン比を 0.3 とし、鋼とコンクリートのヤング係数比 (E_s/E_c) を 7 とした。

この曲線合成桁の床版上に等分布荷重荷重 p が作用した時に、桁の中央断面の床版に生じる曲げモーメント M_R と、曲率半径 $R=2L, 4L, 998L$ (L : スパン長) の場合のそれぞれについて得た結果が図-6 である。 $R=2L, 4L$ において主桁のある位置で曲げモーメントが不連続となるのは、主桁がその分だけ曲げモーメントに抵抗していることを意味する。さらに桁中央断面における床版の垂直応力分布 σ_y を図-7 に示す。曲率が強くな

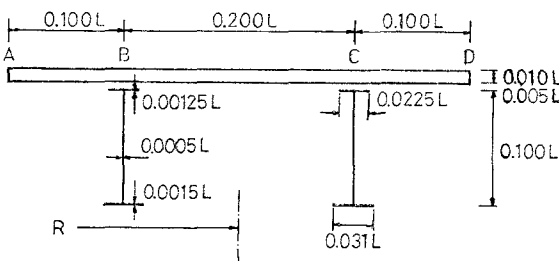


図-4 合成桁断面

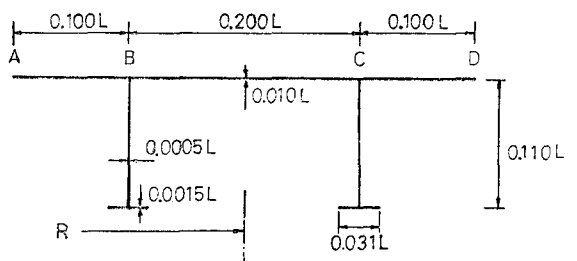


図-5 簡易化された合成桁断面

るにつれて、垂直応力度は増加する傾向にある。

また、前述した Chu の提案した手法による結果と比較検討するために、同一断面の合成桁を図-5 のように簡易化して解析を行なった。そこで得られた結果を、図-6、7 に破線で示した。床版の曲げモーメントについては、 $R=998L$ の場合、両手法の結果はほぼ一致した。しかし、曲率が強くなるにしたがい差が生じて、特に曲率中心に対して外側において差が大きい。次に、垂直応力については、 $R=998L$ の場合、Chu の手法の結果がやや大きな値を示すが、 $R=2L$ になると、逆に小さな値を示し、本文にて提案された手法による結果より 30% 近く小さな値を示す位置もあることがわかる。

これらの差は、結局、Chu の手法において上フランジ板の効果を無視していることに起因するものと思われる。図-8 は、 $R=4L$ の場合の中央断面の床版の沈下量であるが、Chu の手法による結果は、本文にて提案された手法による結果の 2 倍以上の沈下量を示し、構造の簡易化によって、桁全体の剛性が減少したことを示している。

5. あとがき

合成桁構造の床版と主桁の接合状態について検討を行ない、折板理論による合成桁解析の手法を提案した。

さらに数値計算を行ない、計算例を示し、それとともに合成桁解析について、Chu の提案した手法と比較を行なった結果、上フランジ板の効果は無視することはできないことを明らかにした。

本論文の研究において、北大の茅村仁教授より適切な御助言をいただいた。ここに厚く感謝いたします。

数値計算は、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を使用した。

(参考文献)

- 1) 茅村仁・菲澤憲吉：折板理論解析による曲線桁橋の床版応力と有効幅について，土木学会論文報告集 233 号，1975.1 (B5.50.1)
- 2) Chu, K.H. and S.G. Pinjarker : Analysis of horizontally curved box girder bridges, Proc. of ASCE, ST 10, pp.2431-2501, 1971.

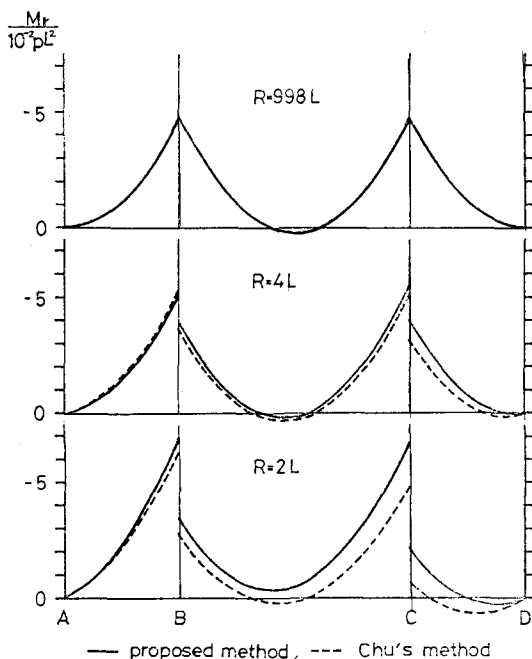


図-6 床版の曲げモーメント

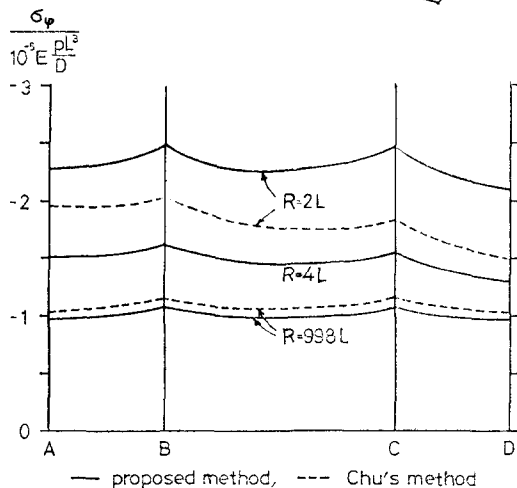


図-7 床版の垂直応力

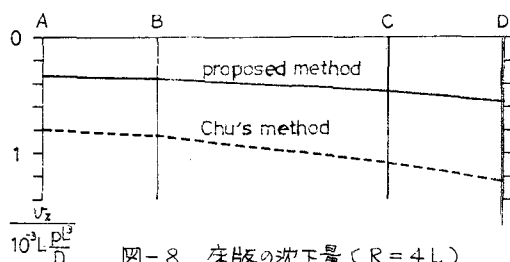
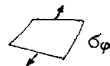


図-8 床版の沈下量 ($R=4L$)