

# 補強筋を有する弾性体の棒状要素に於ける 応力解析について

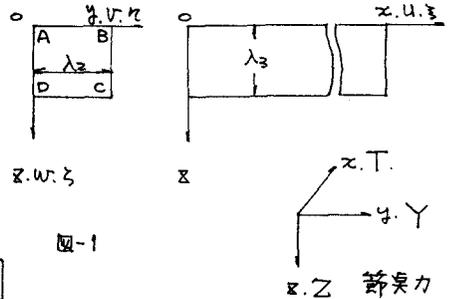
比大工学部 正員 能町純雄  
比見工業大学 同。大島俊之

## 1. 予えおき

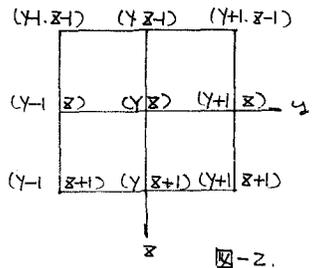
著者は先に矩形断面のプリズム要素に関する関係式を誘導し、両端単純支持の又は矩形断面梁の応力解析について発表した。<sup>1) 2)</sup> 今ではこれを発展させて、プリズムの長手方向に補強筋を有する複合材料に適用した。単純支持以外に境界条件として、Prestressed Concrete に於ける PC 鋼棒の Anchor Zone のように、境界端面に荷重がある場合に於いて計算した。数値計算例としては両端単純支持の梁に於いて、桁荷重の場合に Bousinesq の式と比較し、逆桁荷重の場合に於いて、初等梁理論の値と比較した。両者を重ね合わせた両端単純支持の矩形断面梁に集中荷重が作用した場合の荷重付近の三次元的な応力分布等については別途<sup>3)</sup> 発表の予定である。

## 2. プリズム要素に関する関係式

物体力を無視した弾性論の 3 次元問題から出発して、Lamé の定数を表現するべき応力と変位の関係式を代入して、変位断面方向の一次変位を仮定を用いて断面方向に 2 次元問題を進行させ、残りの力と変位の関係式を求めようとする。



$$T_A = \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} [4\ddot{u}_A + 2\ddot{u}_B + 2\ddot{u}_D + \ddot{u}_C] + \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2} [2(u_B - u_A) + u_C - u_D] + \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [2(u_D - u_A) + u_C - u_B] + \frac{\lambda_3}{12} [2(\dot{v}_B - \dot{v}_A) + \dot{v}_C - \dot{v}_D] + \frac{\mu\lambda_3}{12} [2(\dot{v}_B + \dot{v}_A) + \dot{v}_C + \dot{v}_D] + \frac{\mu\lambda_2}{12} [2(\dot{w}_D - \dot{w}_A) + \dot{w}_C - \dot{w}_B] \quad (1)$$



$T_B, T_C, T_D, Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Z_A, Z_B, Z_C, Z_D$  に関しても同様な手順を繰り返す。今では図 2 の記号を用いて残りの手順を繰り返す。今では図 2 の記号を用いて残りの手順を繰り返す。

$$\frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} [\Delta_y^2 \Delta_x^2 \ddot{u}_{y-1, x-1} + 6\Delta_y^2 \ddot{u}_{y-1, x} + 6\Delta_x^2 \ddot{u}_{y, x-1} + 36\ddot{u}_{y, x}] + \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2} [\Delta_y^2 \Delta_x^2 u_{y-1, x-1} + 6\Delta_y^2 u_{y-1, x}] + \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [\Delta_y^2 \Delta_x^2 u_{y-1, x-1} + 6\Delta_x^2 u_{y, x-1}] + \frac{(\mu + \lambda)\lambda_3}{12} [\Delta_y \Delta_x^2 \dot{v}_{y, x-1} + 6\Delta_y \dot{v}_{y, x}] + \frac{(\mu + \lambda)\lambda_2}{12} [\Delta_y^2 \Delta_x \dot{w}_{y-1, x} + 6\Delta_x \dot{w}_{y, x}] + E_s A_s \ddot{u}_{y, x} = 0 \quad (2)$$

左に  $\Delta^2 \ddot{u}(x-1) = \ddot{u}(x+1) - 2\ddot{u}(x) + \ddot{u}(x-1)$ ,  $\Delta \ddot{u}(x) = \ddot{u}(x+1) - \ddot{u}(x-1)$ ,  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial x}$ 。同様にして  $y, z$  方向にも同様な差分式が導かれる。今では (2) 式に於いて、 $\lambda_2, \lambda_3$  を無限大にして極限を考えると式 (3) が得られる。基本微分方程式 (1) 式と一致する。

$$(2\mu + \lambda)\ddot{u} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\mu + \lambda) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

3. 両端単純支持工字型断面梁の応力解析(2) 112

a) 基本式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{mjk} \\ V_{mjk} \\ W_{mjk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{m00} \\ \Pi_{mjo} \\ \Pi_{mok} \\ V_{mjo} \\ W_{mok} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ -P_3 \\ -P_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

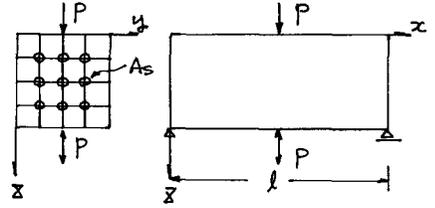


図-3

$$Ez^4 \Pi_{mjk} = \int_0^l S_j S_k [U_{yZ}] \cos \frac{m\pi x}{l} dx$$

$$V_{mjk} = \int_0^l R_j S_k [V_{yZ}] \sin \frac{m\pi x}{l} dx, \quad W_{mjk} = \int_0^l S_j R_k [W_{yZ}] \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

$$K_{11} = (2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \mu \frac{\lambda_3}{\lambda_2} D_j \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_k \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) + E_s A_s \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$$

$$K_{12} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{j\pi}{l} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right), \quad K_{13} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{l} \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right), \quad K_{31} = K_{13}, \quad K_{32} = K_{23},$$

$$K_{21} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{j\pi}{l} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right), \quad K_{22} = \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_2} D_j \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right)$$

$$+ \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3} \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) D_k, \quad K_{23} = (\mu + \lambda) \sin \frac{j\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l}, \quad K_{33} = \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$$

$$+ \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2}{\lambda_3} D_k \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) D_j, \quad A_{11} = -\frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} \sin \frac{j\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} ab \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$$

$$+ \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) \sin \frac{j\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} ab, \quad A_{12} = -\frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{6} \sin \frac{k\pi}{l} b \left(1 - \frac{D_j}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) D_j \sin \frac{k\pi}{l} b$$

$$+ \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3} \sin \frac{k\pi}{l} b, \quad A_{13} = -\frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{6} \sin \frac{j\pi}{l} a \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) D_k \sin \frac{j\pi}{l} a + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2} \sin \frac{j\pi}{l} a$$

$$A_{14} = -\frac{(\mu + \lambda)\lambda_3}{6} \sin \frac{j\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} b \left(\frac{m\pi}{l}\right), \quad A_{15} = -\frac{(\mu + \lambda)\lambda_2}{6} \sin \frac{j\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} a \left(\frac{m\pi}{l}\right) \text{ 以下省略。}$$

(4) 式は (2) 式の応力差分式を本112と同分変換し、Cosine変換の方向に112境界面を消去してaを2aとする。Ez^4 U = 1/6(-1)^j, b = 1/6(-1)^k

b). 境界条件

(4) 式を右辺が1個の4個の境界値  $\Pi_{mjo}, \Pi_{mok}, V_{mjo}, W_{mok}$  に対応する。梁の自由面を仮定する、x方向の本4本の境界条件を同分変換すると、 $\Pi_{mji}, \Pi_{mik}, W_{mji}$  ならびに  $\Pi_{moo}, \Pi_{moi}, W_{moo}, V_{moo}$  を含む式が得られる。= (4) 式で同分変換して得られる項を代入し、整理すると  $2(j+k)$  次元の行列が得られる。  
= この行列を解き、Ez^4に同分変換して、 $\Pi_{moo}$  に対応する式を代入して最終的に  $\Pi_{moo}$  を求め、= (4) 式に代入して求める。一般の応力変位等を求める。

4. 規則的配列工字型断面梁の深さ方向の補強材を有する弾性体の応力解析

a) 基本式

(4) 式に示す境界値は境界に荷重が加わるとは異なる。x方向の有限Fourier変換の境界値を代入して求める。また x=1 時に示す境界値は深さ方向に深さaとして零と仮定して基本式は次のようになる。

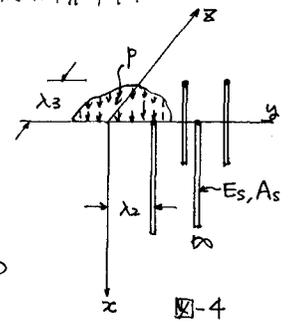


図-4

$$\begin{bmatrix} A_{11}M^2 + A_{12} & A_{13}M & A_{14}M \\ A_{21}M & A_{22}M^2 + A_{23} & A_{24} \\ A_{31}M & A_{32} & A_{33}M^2 + A_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{mjk} \\ V_{mjk} \\ W_{mjk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21}M & 0 \\ 0 & 0 & b_{31}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{mjk} \\ V_{mjk} \\ W_{mjk} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 \in \mathbb{R}^1 \quad a_{11} &= (2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad a_{1k} = \mu \left[ \frac{\lambda_3}{\lambda_2} D_j^i \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) D_k \right] \\
 a_{13} &= (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad a_{14} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right), \quad b_{11} = -(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) - E_s A_s \\
 b_{12} &= (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad b_{13} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right), \quad a_{21} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j} \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \\
 a_{22} &= \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad a_{23} = \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_2} D_j^i \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) + \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) D_k, \quad a_{24} = (\mu + \lambda) \sin \frac{\pi}{j} \sin \frac{k\pi}{k} \\
 b_{21} &= \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad a_{31} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right), \quad a_{32} = (\mu + \lambda) \sin \frac{k\pi}{k} \sin \frac{\pi}{j}, \\
 a_{33} &= \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right), \quad a_{34} = \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_2} D_k \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2} \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) D_j^i, \quad b_{31} = \mu\lambda_2\lambda_3 \left(1 - \frac{D_j^i}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{D_k}{\sigma}\right) \\
 M &= \left(\frac{\mu\pi}{\lambda}\right).
 \end{aligned}$$

(5) 式を解いて、 $m$  に注目すると、分母  $m^6$ 、分子  $m^4$  の境界値の係数と  $\gamma_j > 2$  になる  $2m$   $m > 1$  で逆変換する際、都合分母を分けて閉じた函数表示すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 S_j; S_k [u_{yz}(x)] &= \left[ \frac{1}{l} \left( \frac{b_{11}}{a_{12}} \right) + \frac{2\beta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{11} P_1(x) + B_{11} P_2(x) + C_{11} P_3(x) \} \right] U_{0jk} \\
 &+ \left[ \frac{1}{l} \left( \frac{b_{12}}{a_{12}} \right) + \frac{2\beta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{12} P_1(x) + B_{12} P_2(x) + C_{12} P_3(x) \} \right] V_{0jk} + \left[ \frac{1}{l} \left( \frac{b_{13}}{a_{12}} \right) + \frac{2\beta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{13} P_1(x) \right. \\
 &+ B_{13} P_2(x) + C_{13} P_3(x) \} \right] W_{0jk}, \quad \text{ここで } P_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \alpha} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad P_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(m^2 - \beta)^2 + \gamma^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \\
 P_3(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m^2 - \beta)^2 + \gamma^2} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad a_{01} \text{ は分母 } m^6 \text{ 次で } m \text{ の項の係数。} A_{11}, B_{11} \text{ 等は分子分母}
 \end{aligned} \tag{6}$$

に分けた時の係数  $z_n$  (4) 式のものと同じである。同様にして  $[R_j; S_k][u_{yz}(x)]$ 、 $S_j; [R_k][u_{yz}(x)]$  についても閉じた函数表示が得られる。(α, β, γ は三次方程式の根に等しい)

b) 境界条件。

境界条件として  $\sigma_x|_{x=0} = p_{yz}$  (a),  $\tau_{xy}|_{x=0} = 0$  (b),  $\tau_{xz}|_{x=0} = 0$  (c) の3本を、(5) 式を  $U_{0jk}$ ,  $V_{0jk}$ ,  $W_{0jk}$  に代入して式を得る。これを (6) 式等に代入して、一般に  $n$  番目の項を逆変換して得られる。この際分母の重なりは都合分けて表示される。

### 5. 数値計算例。

a) 対称音形の場合。  $E = 10.0$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $A_s = 0$ ,  $l = 10.0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.125$   
 $P = 100.0$  [kg·cm]  $j = k = 8$ 。

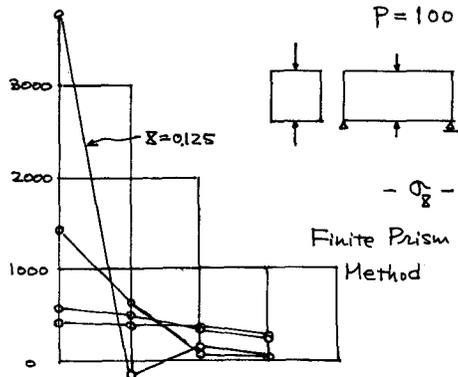


図-5

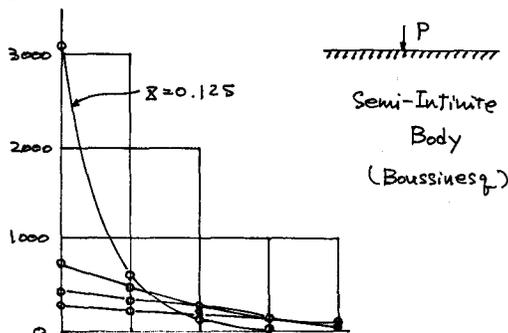


図-6

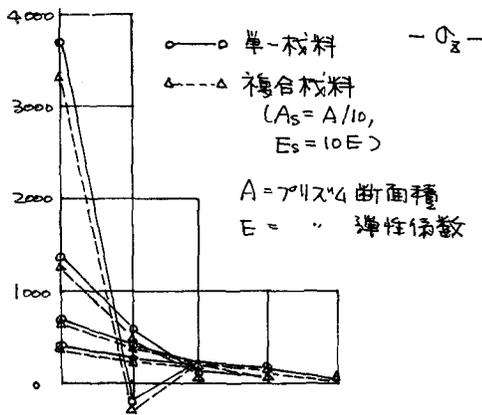


図-7

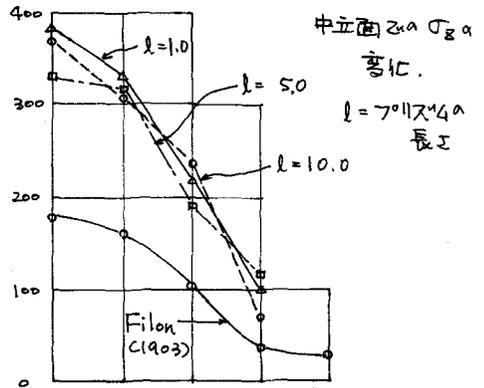


図-8

b) 連結桁弯形の場合.  $E=10.0, \nu=0.25, A_s=0, l=10.0, \lambda_2=\lambda_3=0.125, P=100.0$

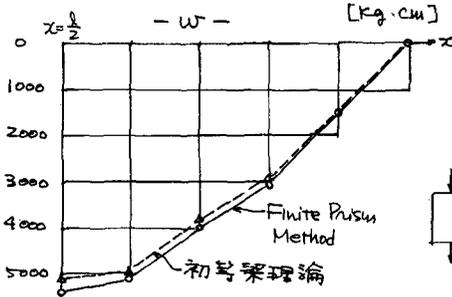


図-9

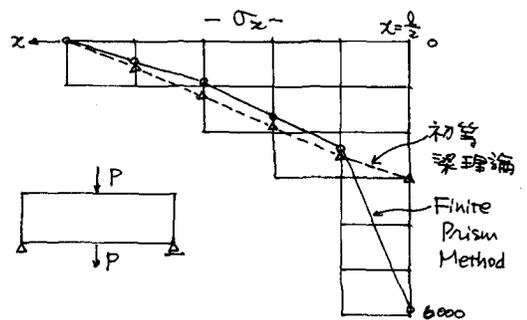


図-10

6. 再とびき. 以上, 7011 x 4 要素の関係式を誘導し, 2種類の場合の境界条件の場合に  $\nu=2$  の式を誘導した.  $\nu$  の数値計算例として, 連結, 連結桁の場合に  $\nu=2$  の他理論式と比較を行った. 図-8-a Filon の値は無限長の2次元問題と  $\nu=2$  の値を参考として  $\nu=2$  の計算は東大大型計算機 HITAC 8800/8700, 北大大型計算機 FACOM 236-60/75 を使用した.

参考文献

- 1) 能町大島: 土木学会年次学術講演会概要集, 工部 (1974).
- 2) 能町大島: 第24回応用力学連合講演会論文抄録集 (1974).
- 3) Proc. of the 24th Japan National Congress for Applied Mechanics (1974) に投稿予定.
- 4) K.T. Sundara Raja Iyenger and M.K. Prabhakara: A Three Dimensional Elasticity Solution for Rectangular Prism under End Loads, ZAMM, Band 49, 1969, S.321.
- 5) K.T. Sundara Raja Iyenger and M.K. Prabhakara: Anchor Zone Stresses in Prestressed Concrete Beams, ASCE, ST3, 1971.
- 6) O.C. Zienkiewicz, J.J.M. Too; The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes, I.C.E., Vol 53, 1972, September.
- 7) S.P. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity, P.57