

3. 両端単純支持工字型断面梁の応力解析について

a) 基本式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{mjk} \\ \bar{V}_{mjk} \\ \bar{W}_{mjk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{m00} \\ \bar{U}_{mjo} \\ \bar{U}_{m0k} \\ \bar{V}_{mjo} \\ \bar{W}_{m0k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ -G \end{bmatrix}$$

$$\bar{U}_{mjk} = \int_0^L S_j S_k [U_{YZ}] \cos \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$\bar{V}_{mjk} = \int_0^L R_j S_k [V_{YZ}] \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad \bar{W}_{mjk} = \int_0^L S_j R_k [W_{YZ}] \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

図-3

$$\begin{aligned} K_{11} &= (3\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_k}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L})^2 + \mu\lambda\frac{\lambda_3}{\lambda_2}D_k(1 - \frac{D_k}{\delta}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}D_k(1 - \frac{D_k}{\delta}) + E_s A_s (\frac{m\pi}{L})^2 \\ K_{12} &= (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{j\pi}{J} (1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L}), \quad K_{13} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{K} (1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L}), \quad K_{31} = K_{13}, \quad K_{32} = K_{23}, \\ K_{21} &= (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{j\pi}{J} (1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L}), \quad K_{22} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_k}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L})^2 + \frac{(3\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_2}D_k(1 - \frac{D_k}{\delta}) \\ &+ \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3}(1 - \frac{D_k}{\delta})D_k, \quad K_{23} = (\mu + \lambda)\sin \frac{j\pi}{J} \sin \frac{k\pi}{K}, \quad K_{33} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_k}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L})^2 \\ &+ \frac{(3\mu + \lambda)\lambda_2}{\lambda_3}D_k(1 - \frac{D_k}{\delta}) + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2}(1 - \frac{D_k}{\delta})D_k, \quad A_{11} = -\frac{(3\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} \sin \frac{j\pi}{J} \sin \frac{k\pi}{K} ab (\frac{m\pi}{L})^2 \\ &+ \frac{\mu}{\delta}(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}) \sin \frac{j\pi}{J} \sin \frac{k\pi}{K} ab, \quad A_{12} = -\frac{(3\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{6} \sin \frac{k\pi}{K} b(1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L})^2 - \frac{\mu}{\delta}(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3})D_k \sin \frac{k\pi}{K} b \\ &+ \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3} \sin \frac{k\pi}{K} b, \quad A_{13} = -\frac{(3\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{6} \sin \frac{j\pi}{J} a(1 - \frac{D_k}{\delta})(\frac{m\pi}{L})^2 - \frac{\mu}{\delta}(\frac{\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3})D_k \sin \frac{j\pi}{J} a + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2} \sin \frac{j\pi}{J} a \\ A_{14} &= -\frac{(\mu + \lambda)\lambda_3}{6} \sin \frac{j\pi}{J} \sin \frac{k\pi}{K} b (\frac{m\pi}{L}), \quad A_{15} = -\frac{(\mu + \lambda)\lambda_2}{6} \sin \frac{j\pi}{J} \sin \frac{k\pi}{K} a (\frac{m\pi}{L}) \text{ 以下省略。} \end{aligned}$$

(4) 式は (2) 式の差分式を本に於て積分変換し、Cosine 変換の方向に於て境界面を消去したものを得る。ここで、 $a = 1 \mp (-1)^j$, $b = 1 \mp (-1)^k$

b). 境界条件

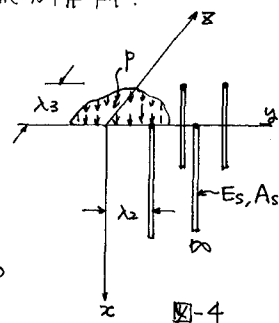
(4) 式に於ける境界値は境界面荷重より遠くには近似的に零と仮定する。また、 x 方向の 4 本の境界条件を積分変換すると、 $\bar{U}_{mjo}$, $\bar{U}_{m0k}$, $\bar{V}_{mjo}$, $\bar{W}_{m0k}$ となる。これら (4) 式で逐次変換して得られる項を代入し、整理すると $2(j+k)$ 次元のマトリクスを得られる。

このマトリクスを求め、さらに逐次変換して、 $\bar{U}_{m00}$ に対応する式を代入して最終的に $\bar{U}_{m00}$ を求め、これを逐次代入して他の変位を求める。

4. 規則的に配置された深さ方向の補強材を有する弾性体の応力解析

a) 基本式

(4) 式に於ける境界値は境界面荷重より遠くには近似的に零と仮定する。また、 x 方向の有限 Fourier 変換の境界値を代入して、 $x=1$ における境界値は深さ方向に深さ方向に零と仮定して基本式は次のようになる。



$$\begin{bmatrix} a_{11}M^2 + a_{12} & a_{13}M & a_{14}M \\ a_{21}M & a_{22}M^2 + a_{23} & a_{24} \\ a_{31}M & a_{32} & a_{33}M^2 + a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{mjk} \\ \bar{V}_{mjk} \\ \bar{W}_{mjk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21}M & 0 \\ 0 & 0 & b_{31}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{mjo} \\ \bar{V}_{mjo} \\ \bar{W}_{mjo} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \in \mathbb{N} \cup \quad a_{11} = (z\mu + \lambda)\lambda_3\lambda_2(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad a_{12} = \mu \left\{ \frac{\lambda_3}{\lambda_2} D_j(1 - \frac{D_k}{\delta}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(1 - \frac{D_j}{\delta}) D_k \right. \\
& a_{13} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j}(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad a_{14} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k}(1 - \frac{D_j}{\delta}), \quad b_{11} = -(z\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}) - E_s A_s \\
& b_{12} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j}(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad b_{13} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k}(1 - \frac{D_j}{\delta}), \quad a_{21} = (\mu + \lambda)\lambda_3 \sin \frac{\pi}{j}(1 - \frac{D_k}{\delta}), \\
& a_{22} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad a_{23} = \frac{(z\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_3} D_j(1 - \frac{D_k}{\delta}) + \frac{\mu\lambda_2}{\lambda_3}(1 - \frac{D_j}{\delta}) D_k, \quad a_{24} = (\mu + \lambda) \sin \frac{\pi}{j} \sin \frac{k\pi}{k} \\
& b_{21} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad a_{31} = (\mu + \lambda)\lambda_2 \sin \frac{k\pi}{k}(1 - \frac{D_j}{\delta}), \quad a_{32} = (\mu + \lambda) \sin \frac{k\pi}{k} \sin \frac{\pi}{j}, \\
& a_{33} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}), \quad a_{34} = \frac{(z\mu + \lambda)\lambda_3}{\lambda_2} D_k(1 - \frac{D_j}{\delta}) + \frac{\mu\lambda_3}{\lambda_2}(1 - \frac{D_k}{\delta}) D_j, \quad b_{31} = \mu\lambda_2\lambda_3(1 - \frac{D_j}{\delta})(1 - \frac{D_k}{\delta}) \\
& M = (\frac{\mu\pi}{\delta}).
\end{aligned}$$

(5) 式を解いて、 m は注目する、分母 m^6 、分子 m^4 の境界値の係数と $\gamma > 1$ なる $2n$ $m > 1$ で逐次増やす際、部分分数に分解して閉じた函数表すこと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
S_j; S_k[U_{yz}(x)] &= \left[\frac{1}{l} \left(\frac{b_{11}}{a_{12}} \right) + \frac{2\delta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{11}P_1(x) + B_{11}P_2(x) + C_{11}P_3(x) \} \right] U_{ojk} \\
&+ \left[\frac{1}{l} \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} \right) + \frac{2\delta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{12}P_1(x) + B_{12}P_2(x) + C_{12}P_3(x) \} \right] V_{ojk} + \left[\frac{1}{l} \left(\frac{b_{13}}{a_{12}} \right) + \frac{2\delta^5}{a_{01}\pi^6} \{ A_{13}P_1(x) \right. \\
&+ B_{13}P_2(x) + C_{13}P_3(x) \} \right] W_{ojk}, \quad \text{左に } P_1(x) = \sum \frac{1}{m^2 - \alpha} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad P_2(x) = \sum \frac{m^2}{m^2(\beta^2 + \gamma^2)} \cos \frac{m\pi x}{l} \\
&P_3(x) = \sum \frac{1}{m^2(\beta^2 + \gamma^2)} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad a_{01} \text{ は分母 } a \text{ の } m^6 \text{ 次 の 項 の 係 数。} A_{11}, B_{11} \text{ 等 は 部分分数}
\end{aligned} \tag{6}$$

に分解する際の係数 $2n$ (4) 式のものを用いる。同様にして $[R_j; S_k][U_{yz}(x)]$ 、 $S_j; [R_k; W_{yz}(x)]$ についても閉じた函数表すことができる。(α, β, γ は三次方程式の根に等しい。)

b) 境界条件。

境界条件として $\sigma_x|_{x=0} = p_{yz}$ (a), $\tau_{xy}|_{x=0} = 0$ (b), $\tau_{xz}|_{x=0} = 0$ (c) の本例、(5) 式を U_{ojk} , V_{ojk} , W_{ojk} に代入する式を得る S 値の $2n$ 、 n 個を (6) 式等に代入して、一般 S は高次で部分分数に分解される。この際分母の重なり部分は分解して表す。

5. 数値計算例。

a) 対称音形の場合。 $E = 10.0$, $\nu = 0.25$, $A_s = 0$, $l = 10.0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.125$
 $P = 100.0$ [kg·cm] $\gamma = k = 8$ 。

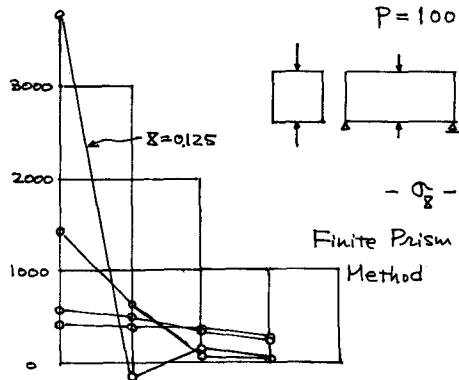


図-5

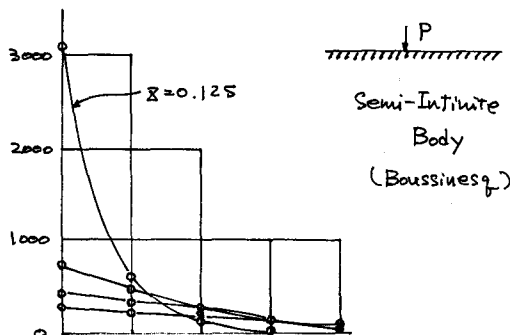


図-6

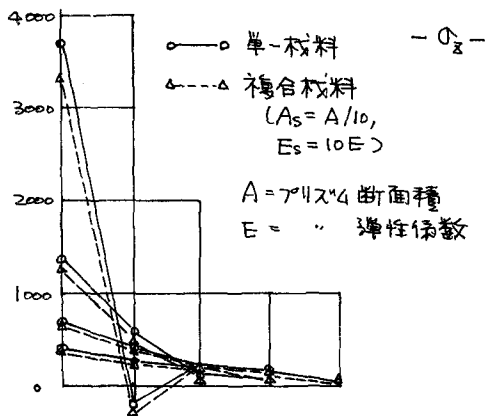


図-7

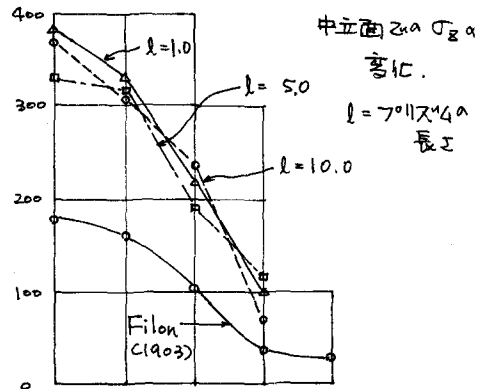


図-8

b) 連結桁弯形の場合. $E = 10.0$, $\nu = 0.25$, $A_s = 0$, $l = 10.0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.125$, $P = 100.0$

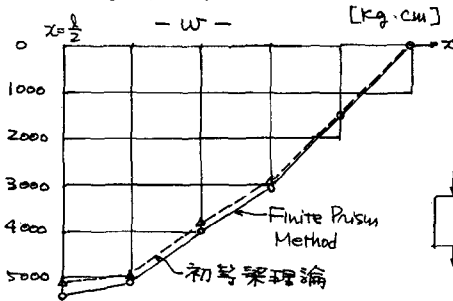


図-9

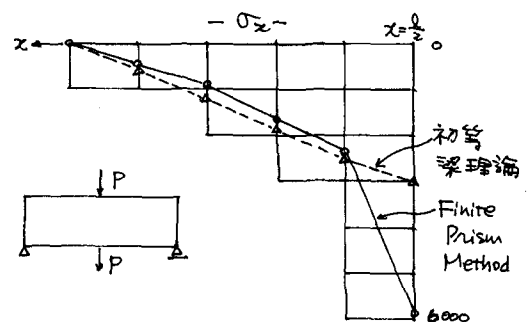


図-10

6. 図 8 と同じ。以上、70x4 要素の関係式を誘導し、2 種類の場合に
ついて、式を誘導した。その数値計算例として、連結、逐次連結の場合について、他の理論式
と比較を行った。その図 8-a Filon の値は無限長の 2次元問題の値を参考として
とした。計算は東大大型計算機 HITAC 8800/8700, 武大大型計算機 FACOM 236-60/75 を
使用した。

参考文献

- 1) 能町大島: 土木学会年次学術講演会概要集, 工部 (1974)。
- 2) 能町大島: 第24回応用力学連合講演会論文抄録集 (1974)。
- 3) Proc. of the 24th Japan National Congress for Applied Mechanics (1974) に投稿予定。
- 4) K.T. Sundara Raja Iyenger and M.K. Prabhakara: A Three Dimensional Elasticity Solution for Rectangular Prism under End Loads, ZAMM, Band 49, 1969, S.321。
- 5) K.T. Sundara Raja Iyenger and M.K. Prabhakara: Anchor Zone Stresses in Prestressed Concrete Beams, ASCE, ST3, 1971。
- 6) O.C. Zienkiewicz, J.J.M. Too: The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes, I.C.E., Vol 53, 1972, September。
- 7) S.P. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity, P.57