

円孔を有する無限厚板の軸対称応力解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

短円柱および円筒の軸対称応力問題の研究は、従来より、数多く見受けられる。^{1), 2)} これらの研究と幾分異なる研究として、一軸引張を受ける円孔を有する厚板の応力問題を取り扱った中原³⁾ら、Alblas⁴⁾の論文も見受けられる。

本論文は、無限厚板の円孔面に部分分布の圧縮荷重が作用する軸対称問題の三次元応力解析を H. Neuber の解に基づいて行なうものである。円筒座標による軸対称問題の解法は、J. H. Michell の関数によるのが一般的であるが、本論文では、H. Neuber の解を用いることにする。

2. 基本解と応力関数

変位ベクトル u で表わされた釣合方程式の基本解を H. Neuber にしたがって次のように置く。

$$2Gu = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\bar{\Phi} \cdots \cdots (1)$$

ただし

$$F = R\bar{\Phi} + \Phi_0, \quad \nabla^2 \Phi_0 = 0 \cdots (2), \quad \nabla^2 \bar{\Phi} = 0 \cdots (3)$$

$$\bar{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \quad R = (r, \theta, z)$$

G : せん断弾性係数, ν : ポアソン比

式 (3) を成分で表わすと、軸対称問題の場合には、次式となる。

$$\nabla^2 \Phi_3 = 0 \cdots (4), \quad \nabla^2 \Phi_1 - \frac{\Phi_1}{r^2} = 0 \cdots (5)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{02} = 0 \cdots (6), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式 (2), (4) および式 (5) を解いて、応力関数 Φ_0 , Φ_1 などは次のように求められる。

$$\Phi_{03} = - \sum_{s=1}^{\infty} (A_s J_0(ds r) + B_s Y_0(ds r)) \cosh ds z \quad \left. \begin{array}{l} \Phi_3 = - \sum_{s=1}^{\infty} (G_s J_0(ds r) + D_s Y_0(ds r)) \sinh ds z \end{array} \right\} \cdots (7)$$

$$\Phi_{01} = - \sum_{n=1}^{\infty} E_n K_0(\beta_n r) \cos \beta_n z + E_0 \ln r \quad \left. \begin{array}{l} \Phi_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} F_n K_1(\beta_n r) \cos \beta_n z \end{array} \right\} \cdots (8)$$

ここで

$$\beta_n = n\pi/h, \quad ds = \lambda_s/a, \quad s, n = 1, 2, 3 \cdots$$

式 (8) の第 1 式の第 2 項は荷重の Fourier 級数展開に表われる定数項を処理するに付加したものである。

A_s, G_s および E_n などは求められるべき未知定数である。

3. 変位と応力の表現式

式 (7) から導出される変位および応力には superscript (1) を、式 (8) から得られるものには (2) を付して表わすと、変位および応力は次のように表わされる。

$$2Gu_r^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-ds) J_1(ds r) (A_s \cosh ds z + G_s z \sinh ds z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-ds) Y_1(ds r) (B_s \cosh ds z + D_s z \sinh ds z) \cdots (9)$$

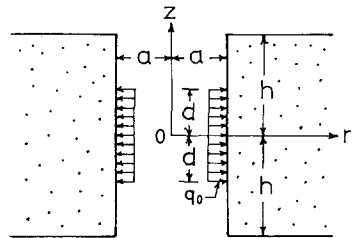
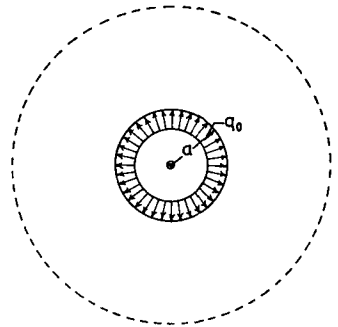


図-1 円孔を有する無限厚板

$$2Gu_z^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} [\{d_j A_j - (3-4\nu)G_j\} \sinh d_j z + G_j d_j z \cosh d_j z] J_0(d_j r) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [\{d_j B_j - (3-4\nu)D_j\} \sinh d_j z + D_j d_j z \cosh d_j z] Y_0(d_j r) \cdots \cdots (10)$$

$$2Gu_r^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cos \beta_n z [\{\beta_n E_n + 4(1-\nu)F_n\} K_1(\beta_n r) + F_n \beta_n r K_0(\beta_n r)] - \frac{E_0}{r} \cdots \cdots (11)$$

$$2Gu_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \sin \beta_n z \{E_n K_0(\beta_n r) + F_n r K_1(\beta_n r)\} \cdots \cdots (12)$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) [\{(d_j A_j + 2\nu G_j) \cosh d_j z + G_j d_j z \sinh d_j z\} J_0(d_j r) - \\ - \frac{J_1(d_j r)}{r} (A_j \cosh d_j z + G_j z \sinh d_j z)] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) [\{(d_j B_j + 2\nu D_j) \cosh d_j z + D_j d_j z \sinh d_j z\} Y_0(d_j r) - \\ - \frac{Y_1(d_j r)}{r} (B_j \cosh d_j z + D_j z \sinh d_j z)] \cdots \cdots (13)$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) \{(A_j \cosh d_j z + G_j z \sinh d_j z) \frac{J_1(d_j r)}{r} + 2\nu G_j \cosh d_j z J_0(d_j r)\} + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) \{(B_j \cosh d_j z + D_j z \sinh d_j z) \frac{Y_1(d_j r)}{r} + 2\nu D_j \cosh d_j z Y_0(d_j r)\} \cdots \cdots (14)$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j [\{d_j A_j - 2(1-\nu)G_j\} \cosh d_j z + G_j d_j z \sinh d_j z] J_0(d_j r) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} d_j [\{d_j B_j - 2(1-\nu)D_j\} \cosh d_j z + D_j d_j z \sinh d_j z] Y_0(d_j r) \cdots \cdots (15)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) J_1(d_j r) [\{d_j A_j - (1-2\nu)G_j\} \sinh d_j z + G_j d_j z \cosh d_j z] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (-d_j) Y_1(d_j r) [\{d_j B_j - (1-2\nu)D_j\} \sinh d_j z + D_j d_j z \cosh d_j z] \cdots \cdots (16)$$

$$\sigma_r^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n z \left[\frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \{\beta_n E_n + F_n(4-4\nu + \beta_n^2 r^2)\} + K_0(\beta_n r) \{\beta_n E_n + \right. \\ \left. + (3-2\nu)F_n\} \right] + E_0/r^2 \cdots \cdots (17)$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \cos \beta_n z \left[\frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \{\beta_n E_n + 4(1-\nu)F_n\} + (1-2\nu)F_n K_0(\beta_n r) \right] - \\ - E_0/r^2 \cdots \cdots (18)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n) \cos \beta_n z \{(\beta_n E_n - 2\nu F_n) K_0(\beta_n r) + F_n \beta_n r K_1(\beta_n r)\} \cdots \cdots (19)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \beta_n z [\{\beta_n E_n + 2(1-\nu)F_n\} K_1(\beta_n r) + F_n \beta_n r K_0(\beta_n r)] \cdots \cdots (20)$$

上記の諸式で、添字 (1) と (2) を付した変位および応力をおのおの加えたものが求めるものである。

4. 境界条件と未知定数の関係式

円孔面および厚板の表面における境界条件は次のようである。

$$(\tau_{rz})_{r=a} = 0 \cdots \cdots (21), \quad (\tau_{rz})_{z=\pm h} = 0 \cdots \cdots (22)$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p(z) \cdots \cdots (23), \quad (\sigma_z)_{z=\pm h} = 0 \cdots \cdots (24)$$

式 (22) より次の関係が得られる。

$$A_1 = \frac{G_1}{\alpha_1} (1 - 2\nu - d_1 h \coth d_1 h) \dots (25), \quad B_1 = \frac{D_1}{\alpha_1} (1 - 2\nu - d_1 h \coth d_1 h) \dots (26)$$

式 (21) より次の関係が得られる。

$$D_1 = -\frac{J_1(\alpha_1 a)}{Y_1(\alpha_1 a)} G_1 \dots (27), \quad E_n = -\frac{F_n}{\beta_n} \left\{ 2(1-\nu) + \beta_n a \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)} \right\} \dots (28)$$

式 (25) ~ (28) の関係により, τ_{rz} に関する境界条件は式の上で満足されていることになる。また, これらの関係により, 応力関数に初めに含まれていた 7 個の未知定数が G_1, F_n および E_0 の 3 個の未知定数に減少する。この 3 個の未知定数で変位および応力を表わすことができ, 例えば, σ_r, σ_z については次のようである。

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} = & \sum_{n=1}^{\infty} (-d_n) G_1 C_0(d_n r) \left\{ (1 - d_n h \coth d_n h) \cosh d_n z + d_n z \sinh d_n z \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} d_n G_1 \frac{C_1(d_n r)}{d_n r} \left\{ (1 - 2\nu - d_n h \coth d_n h) \cosh d_n z + d_n z \sinh d_n z \right\} \dots (29.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} = & \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n z F_n \left\{ \frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r} (2 - 2\nu + \beta_n^2 r^2 - \beta_n a \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}) + K_0(\beta_n r) (1 - \beta_n a \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}) \right\} + \\ & + E_0 / r^2 \dots (29.b) \end{aligned}$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-d_n) G_1 C_0(d_n r) \left\{ (1 + d_n h \coth d_n h) \cosh d_n z - d_n z \sinh d_n z \right\} \dots (30.a)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n z F_n \left\{ (2 + \beta_n a \frac{K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)}) K_0(\beta_n r) - \beta_n r K_1(\beta_n r) \right\} \dots (30.b)$$

上記の諸式に含まれる $C_0(d_n r)$ および $C_1(d_n r)$ は

$$C_\mu(d_n r) = J_\mu(d_n r) - \frac{J_1(d_n a)}{Y_1(d_n a)} Y_\mu(d_n r) \quad (\mu=0, 1) \dots (31)$$

と定義された Cylindrical function である。また, 固有値 λ_n は次式を満足する根である。

$$J_1(\lambda_n \frac{a}{h}) - \frac{J_1(\lambda_n)}{Y_1(\lambda_n)} Y_1(\lambda_n \frac{a}{h}) = 0 \dots$$

$$(\frac{a}{h} \gg a) \dots (32)$$

残りの境界条件式 (23) および (24) を満足させるためには, σ_r を Fourier 級数に, σ_z を Bessel の級数におおの展開することが必要となる。結果のみを示すことにすると, 次の 2 群の連立一次方程式を得る。

式 (23) より

$$H_n F_n' - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n G_n' + \frac{2}{\pi h} \sin \frac{\pi n d}{h} = 0 \dots$$

$$\dots (33)$$

ここで

$$H_n = K_1(\beta_n a) \left\{ 2 - 2\nu + \frac{1}{2} \pi^2 \lambda_n^2 (1 - \frac{K_0^2(\beta_n a)}{K_1^2(\beta_n a)}) \right\}$$

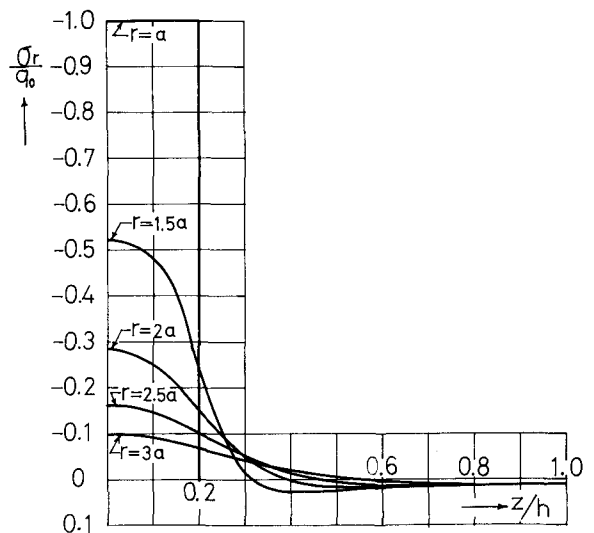


図-2 σ_r の分布

$$L_n = \frac{4\lambda^2 f^3 \pi^2 (H)^n}{(\lambda^2 + f^2 \pi^2)^2} \sinh d \cdot C_0(\lambda_1)$$

$$E'_0 = -d/h \dots \dots (33')$$

式(24)より

$$M_1 G'_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n N_1 F'_n = 0 \dots \dots (34)$$

ここで

$$M_1 = \lambda_1 (\cosh d \cdot h + d \cdot h / \sinh d \cdot h)$$

$$n N_1 = \frac{2(H)^n f^2 \pi^2}{e^2 C_0^2(d \cdot h) - C_0^2(\lambda_1)} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 + f^2 \pi^2} \times$$

$$\times \{ e^{2f\pi} \pi C_0(d \cdot h) K_0(\beta_n h) - e C_0(d \cdot h) K_1(\beta_n h) \times$$

$$\times \left(\frac{f \pi K_0(\beta_n a)}{K_1(\beta_n a)} + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + f^2 \pi^2} \right) + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + f^2 \pi^2} \times$$

$$\times C_0(\lambda_1) K_1(\beta_n a) \}$$

また,

$$F'_n = F_n / a g_0, G'_0 = G_0 / a g_0$$

$$E'_0 = E_0 / a^2 g_0, f = a/h, e = b/a$$

5. 数値計算例

計算に用いた諸量は, $a/h = 0.25$, $d/h = 0.2$, $b/a = 5.0$ および $\nu = 0.25$ である。級数の項数を n および m について 22 項取り応力を求め図-2 ~ 図-5 に示した。

図-3 に示されているように, σ_θ は円孔面の荷重の作用する境界で不連続となるが, やはり, 引張応力である。

図-4 に示されているように, σ_z も円孔面で不連続となり, 圧縮から引張応力に急変する。また, 円孔面から離れるにしたがい急激に減少する。

6. 結 語

H. Neubert の解より出発して, 円孔を有する無限厚板の軸対称応力解析を行なった。軸対称問題の解法には一般に Michell の関数が用いられるが, H. Neubert の解によっても一向にさしつかえないようである。

級数の項数は 22 項しか取らなかったが, 実用上十分な精度の応力値が得られた。円孔面においては有限円筒が内圧を受ける問題²⁾の応力分布と良く類似した結果が得られた。

参考文献

1) 斎藤秀雄: 短円柱および円盤の軸対称変形, 日本機械学会論文集, 第18巻・68号, pp. 21~28, 昭27

2) 柴原正雄・尾田十八: 軸対称変形をする有限円筒問題, 日本機械学会論文集, 第34巻 259号,

pp. 388~402, 昭43-3

3) 中原一郎・小泉 堯: 一軸引張りを受ける無限板の円孔周辺応力におよぼす板厚の影響, 日本機械学会論文集, 第25巻 151号, pp. 181~189, 昭34-3

4) 宮本 博: 3次元弾性論, pp. 80~97, 裳華房, 1967

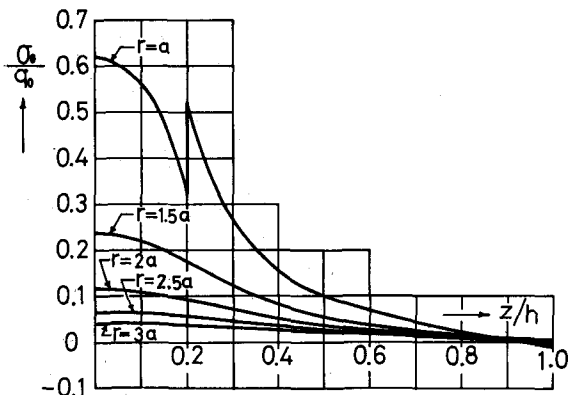


図-3 σ_θ の分布

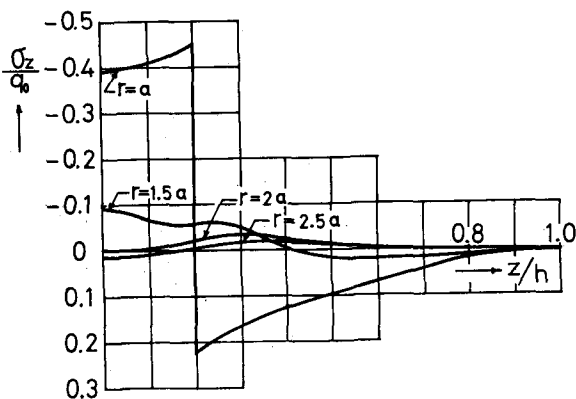


図-4 σ_z の分布

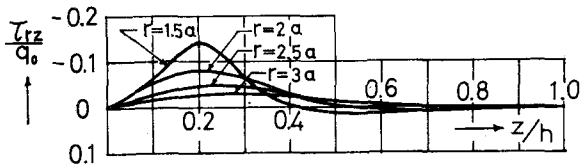


図-5 τ_{rz} の分布