

多層弾性体の圧入問題について

北海道大学工学部 正員 能町純雄

室蘭工業大学 正員 松岡健一

1. まえがき 弾性体の接触応力問題は、2次元問題に対しては多くの研究があり、ほとんど完成したような観がある。⁽¹⁾⁽²⁾ また3次元問題に対しては、*Hertz* や *Boussinesque* の研究があるが、半無限体の問題では *Sneddon*⁽³⁾ が *Hankel* 変換を使って剛円柱および円錐の圧入(スタンプ)の問題を解析している。これらはいずれも軸対称問題であるが、本稿はこれを非軸対称問題に拡張し、傾斜した底面をもつ剛円柱の圧入問題を解析している。以上の研究は、ほとんど半無限領域に対するものであり、多層体の接触応力に関するものとしては2次元問題についてさえも解析が困難なため、解析解に関する研究はなく、数値解析又は近似解析に関する研究も数が少なく、著者は2層体に対する本稿の研究⁽⁴⁾ に関する文献をもつのみである。さらに3次元問題に関する研究はほとんど行われていないと思われる。従って多層弾性体の3次元圧入問題に対しても解析解を求めるとは、ほとんど不可能に近いと考えられるので、簡単に、高精度の近似解析の方法を見いだすことがまず第一の問題となる。本論文では、この一つの方法として、解析解と数値解を組合せて解析する方法で非軸対称の圧入(スタンプ)の問題を解析したので、若干の計算例とともに述べる。これらの問題は基礎地盤上の剛体(構造物)の変化によって基礎地盤に生ずる変形および応力の挙動を解析するにあつての一つのツチがかりを与えるものと思われる。

2. 無限厚板の一般解 無限厚板を図-1に示すように、厚さの方向に z 座標、これに垂直な方向に r, θ 座標をとりそれぞれの方向の変位成分を u, v, w とする。この無限厚板の一般解は、有限 *Fourier-Hankel* 変換を用いると⁽⁵⁾、

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \{ A_{m32} J_{m+1}(\xi r) + B_{m32} J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \cos m\theta \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \{ A_{m32} J_{m+1}(\xi r) - B_{m32} J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \sin m\theta \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty W_{m32} J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta \quad (3)$$

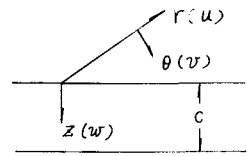


図-1. 無限厚板

$$A_{m32} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\mu} \phi^{(k)}_{32} \gamma_{m3k} \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} \{ \phi^{(k)}_{32} + \psi^{(k)}_{32} \} (\delta_{m3k} - \delta_{m5k}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi^{(k)}_{32} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi^{(k)}_{32} - \psi^{(k)}_{32}) \right\} D_{m3k} \right], \quad (4)$$

$$B_{m32} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\mu} \phi^{(k)}_{32} \delta_{m3k} - \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} \{ \phi^{(k)}_{32} + \psi^{(k)}_{32} \} (\delta_{m3k} - \delta_{m5k}) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi^{(k)}_{32} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi^{(k)}_{32} - \psi^{(k)}_{32}) \right\} D_{m3k} \right], \quad (5)$$

$$W_{m32} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} P^{(k)}_{32} (\gamma_{m3k} - \delta_{m3k}) + \left\{ Q^{(k)}_{32} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(k)}_{32} \right\} D_{m3k} \right], \quad (6)$$

$$Q^{(1)}_{32} = \frac{\sinh \xi (c-2)}{\sinh \xi c}, \quad Q^{(2)}_{32} = \frac{\sinh \xi c}{\sinh \xi c}, \quad \phi^{(1)}_{32} = \frac{\cosh \xi (c-2)}{\sinh \xi c}, \quad \phi^{(2)}_{32} = \frac{\cosh \xi c}{\sinh \xi c},$$

$$P^{(1)}_{32} = \xi c \phi^{(1)}_{32} - Q^{(2)}_{32} \frac{\xi c}{\sinh \xi c}, \quad P^{(2)}_{32} = \xi c \phi^{(2)}_{32} + Q^{(1)}_{32} \frac{\xi c \cosh \xi c}{\sinh \xi c},$$

$$\psi^{(1)}_{32} = \xi c Q^{(1)}_{32} - \phi^{(2)}_{32} \frac{\xi c}{\sinh \xi c}, \quad \psi^{(2)}_{32} = \xi c Q^{(2)}_{32} + \phi^{(1)}_{32} \frac{\xi c \cosh \xi c}{\sinh \xi c},$$

(4)~(6)式において $c \rightarrow \infty$ とすれば、これは半無限体の一般解でもある。また $m=0$ とすれば軸対称変形を表わす。 V, δ, D は境界の物理量で与えられる積分定数であり、境界条件を満足するように決定する。尚、 μ, λ は Lamé の弾性定数、 $J_m(\xi r)$ は m 次の第一種ベッセル函数である。

また各方向の応力成分を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$ とすると、これらの値は、*Hooke* の法則より求められ、次のようになる。

$$\sigma_r = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \left\{ \lambda \Delta + 2\mu (A_{m32} - B_{m32}) \right\} J_m(r) - 2\mu \left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(r) - (m-1) B_{m32} J_{m-1}(r) \right\} \frac{1}{r} \right] d\theta \cos m\theta, \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \left\{ \lambda \Delta J_m(r) + 2\mu \left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(r) - (m-1) B_{m32} J_{m-1}(r) \right\} \frac{1}{r} \right\} \right] d\theta \cos m\theta, \quad (8)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \left\{ \phi_i^{(k)}(z) + \psi_i^{(k)}(z) \right\} D_{m3k} - \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi_i^{(k)}(z) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_i^{(k)}(z) - \psi_i^{(k)}(z)) \right\} (b_{m3k} - \delta_{m3k}) \right] J_m(r) d\theta$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\phi_i^{(k)}(z) \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} (b_{m3k} - \delta_{m3k}) + \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} D_{m3k} \right\} \right], \quad \perp \text{に } \cos m\theta, \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \mu \left[z^2 (A_{m32} - B_{m32}) J_m(r) - 2z \left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(r) + (m-1) B_{m32} J_{m-1}(r) \right\} \frac{1}{r} \right] d\theta \sin m\theta, \quad (10)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\pi} z^2 \left\{ T_{m32}^a J_{m+1}(r) - T_{m32}^b J_{m-1}(r) \right\} d\theta \sin m\theta, \quad (11)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\pi} z^2 \left\{ T_{m32}^a J_{m+1}(r) + T_{m32}^b J_{m-1}(r) \right\} d\theta \cos m\theta, \quad (12)$$

$$T_{m32}^a = \sum_{k=1}^{\infty} \left[Q_i^{(k)}(z) \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P_i^{(k)}(z) \left\{ \frac{1}{2} (b_{m3k} - \delta_{m3k}) \right\} \mu D_{m3k} \right\} \right], \quad T_{m32}^b = \sum_{k=1}^{\infty} \left[Q_i^{(k)}(z) \delta_{m3k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P_i^{(k)}(z) \left\{ \frac{1}{2} (b_{m3k} - \delta_{m3k}) \right\} \mu D_{m3k} \right].$$

3. 多層弾性体の境界条件 多層体は、無限厚板を重ね合せて解利あることが出来る。今多層体を図-2 のようにとり、各層境界を表面から数えて、0, 1, ..., i, ..., n-1 とし、i-1, i 間の厚板を表わす全ての物理量、一般式に含まれる変数等にサフィックス i を付し、z は各層の局所座標で与えるものとする。ここで各層境界では、変位および応力が連続であるとすると、

$$u_{(i)}|_{z=0} = u_i|_{z=C_i} \quad (13)$$

$$v_{(i)}|_{z=0} = v_i|_{z=C_i} \quad (14)$$

$$w_{(i)}|_{z=0} = w_i|_{z=C_i} \quad (15)$$

$$\sigma_{z(i)}|_{z=0} = \sigma_{zi}|_{z=C_i} \quad (16)$$

$$\tau_{zr(i)}|_{z=0} = \tau_{zri}|_{z=C_i} \quad (17)$$

$$\tau_{\theta z(i)}|_{z=0} = \tau_{\theta zi}|_{z=C_i} \quad (18)$$

と仮定し、(15), (17), (18) 式から

$$D_{m32}^{(i)} = D_{m32}^{(i)} = c D_{m32}, \quad \gamma_{m32}^{(i)} = \gamma_{m32}^{(i)} = c \gamma_{m32}, \quad \delta_{m32}^{(i)} = \delta_{m32}^{(i)} = c \delta_{m32} \quad (19)$$

(13), (14) 式は (1), (2), (4), (5) 式から

$$A_{m32}^{(i)}|_{z=0} = A_{m32}^{(i)}|_{z=C_i}, \quad B_{m32}^{(i)}|_{z=0} = B_{m32}^{(i)}|_{z=C_i} \quad (20)$$

$$\text{又は, } (A_{m32}^{(i)} \pm B_{m32}^{(i)})|_{z=0} = (A_{m32}^{(i)} \pm B_{m32}^{(i)})|_{z=C_i} \quad (20')$$

$$A_{m32}^{(i)} - B_{m32}^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \phi_i^{(k)}(z) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_i^{(k)}(z) - \psi_i^{(k)}(z)) \right\} \alpha_{m3k}^{(i)} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi_i^{(k)}(z) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_i^{(k)}(z) - \psi_i^{(k)}(z)) \right\} D_{m3k}^{(i)} \right] \quad (21)$$

$$A_{m32}^{(i)} + B_{m32}^{(i)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \phi_i^{(k)}(z) \beta_{m3k}^{(i)} \quad (22)$$

ただし、 $\alpha_{m3k}^{(i)} = (\gamma_{m3k}^{(i)} - \delta_{m3k}^{(i)})$, $\beta_{m3k}^{(i)} = (\gamma_{m3k}^{(i)} + \delta_{m3k}^{(i)})$

ところで、本論ではスタンプの問題を取扱うが、表面ではせん断応力がゼロとすれば $\gamma_{m31}^{(i)} = \delta_{m31}^{(i)} = 0$ ゆえに $\beta_{m31}^{(i)} = 0$ とし (22) 式から全ての β は 0 とする。従ってこの場合各層境界における境界条件式は (16) か (21) 式となる。また、n-1 境界では n 層を半無限体として取扱い $C_n = \infty$ とした場合の式を用いる。さらに表面では $\alpha_{m31}^{(i)} = 0$ であり

$$\sigma_z|_{z=0} = p(r, \theta), \quad \text{ただし } p(r, \theta) \text{ は表面に働く垂直応力を表わす。}$$

$$\therefore -\frac{2\mu_i(\mu_i+\lambda_i)}{2\mu_i+\lambda_i} \left\{ \phi_i^{(1)}(z_0) + \psi_i^{(1)}(z_0) \right\} D_{m3} - \left\{ \frac{\lambda_i}{2\mu_i+\lambda_i} \phi_i^{(2)}(z_0) - \frac{\mu_i+\lambda_i}{2\mu_i+\lambda_i} (\phi_i^{(2)}(z_0) - \psi_i^{(2)}(z_0)) \right\} \alpha_{m3}^{(i)} \\ - \frac{2\mu_i(\mu_i+\lambda_i)}{2\mu_i+\lambda_i} \left\{ \phi_i^{(2)}(z_0) + \psi_i^{(2)}(z_0) \right\} D_{m3} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r p(r, \theta) J_m(r) \cos m\theta dr d\theta \quad (23)$$

3. 圧入問題の解法方法 多層体の圧入問題を解析する手段としては、表面に部分分布荷重が作用するときの多層体の解を利用して、接触面の接触応力を部分分布荷重に置換え、このときの表面の変位を圧入条件に一致させるように分布荷重を決定する方法が一般的であり、不朽の研究もこの方法で行われているが、この方法では、仮定の仕方から当然接触応力が不連続となる。この点を考慮して、本論文では、接触応力および接触面の変位を次のように仮定する。

$$\bar{\sigma}_{z=0} = \bar{\Phi}_0(r, \theta) + \bar{\Psi}(r, \theta) \quad (24) \quad , \quad w_1)_{z=0} = w_0(r, \theta) + w'(r, \theta) \quad (25)$$

ここで、 $\bar{\Phi}_0, w_0$ は半無限体の圧入問題の解、 $\bar{\Psi}, w'$ は多層体の場合の修正項である。 $\bar{\Psi}$ の分布については、接触応力の分布を図-3に示すように仮定したとき、

$$\bar{\Psi}(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_m \cos m\theta \sum_{i=1}^{l-1} S_i(r) \quad (m \neq 0) \quad (26)$$

$$S_i(r) = \begin{cases} \frac{r_i^m r_i^m}{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}} \left[p_i \left\{ \left(\frac{r}{r_i} \right)^m - \left(\frac{r_{i-1}}{r} \right)^m \right\} \right. \\ \left. - p_{i-1} \left\{ \left(\frac{r}{r_i} \right)^m - \left(\frac{r_{i-1}}{r} \right)^m \right\} \right], & r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ 0, & r < r_{i-1}, r > r_i \end{cases}$$

とおく。従ってこのとき(23)式の右辺は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r p(r, \theta) J_m(\pi r) \cos m\theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \bar{\Phi}_0(r, \theta) J_m(\pi r) \cos m\theta dr d\theta \\ &+ \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{\pi} p_i \left[\frac{r_i^m}{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}} \left\{ r_i^{m+1} J_{m+1}(\pi r_i) - r_{i-1}^{m+1} J_{m+1}(\pi r_{i-1}) + r_{i-1}^{m+1} J_{m-1}(\pi r_i) - r_i^{m+1} J_{m-1}(\pi r_{i-1}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_i^m}{r_{i-1}^{2m} - r_i^{2m}} \left\{ r_i^{m+1} J_{m+1}(\pi r_i) - r_{i-1}^{m+1} J_{m+1}(\pi r_{i-1}) - r_{i-1}^{m+1} J_{m-1}(\pi r_{i-1}) + r_i^{m+1} J_{m-1}(\pi r_i) \right\} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

(16), (20'), (21), (23), (27)式から各層の $D_{m\pi}, \alpha_{m\pi}$ を $\bar{\Phi}_0$ および p_i ($i=1, \dots, l-1$) を含む形で求めることができるが、 $0 D_{m\pi}$ ($= D'_{m\pi}$) については次の条件を満足しなくてはならない。

$$\frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty 0 D_{m\pi} \cdot \pi J_m(\pi r) d\pi \cos m\theta = w_1)_{z=0} \quad (28)$$

(28)式は r_i ($i=1, \dots, l$) の各点で成立しなくてはならないから、この条件より、仮定した接触応力 p_i を求めなければならない。 $m=0$ のときは別な函数を仮定するが、ここでは省略する。

4. 半径 a の剛円柱が傾斜して作用する場合 この場合は、軸対称問題と、非軸対称問題の合成となるが、ここでは、非軸対称成分のみを考えることとする。すなわち接触面の z 方向変位は、

$w_1)_{z=0} = \varepsilon r/a \cos \theta$ で表わされる。ただし ε は $r=a, \theta=0$ における変位である。この問題の半無限体の場合は半式によっても解かれているが、

$$w_0(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{a} r \cos \theta & 0 \leq r \leq a \\ \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{a} \left\{ r \sin^{-1} \frac{a}{r} - a \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right\} \cos \theta & r \geq a \end{cases}$$

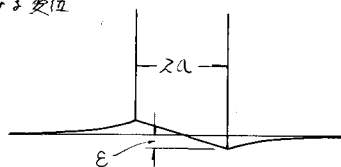


図-4 表面変位

$$\bar{\Phi}_0(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{2\mu_1(\mu_1+1)}{2\mu_1+1} \frac{4\varepsilon}{a} \frac{r}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \cos \theta & 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

とすることがわかっている。このとき $m=1$ であるから各式で $m=1$ とおき、(28)式を満足するように p_i

を決定する。

5. 数値計算例 4. について若干の数値計算を行なった。計算は2層の場合で、表層の厚さを a (円柱の半径)、基層の厚さは無限大、表層、基層の弾性係数をそれぞれ、 $E_1 = E_2 = E$; $E_1 = 0.1E, E_2 = E$; $E_1 = E, E_2 = 0.1E$; の3種でポアソン比はすべて 0.25 とした。分割数は、 $r_0/a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0$ の6点とし、数値積分はきについて π ごとに区間をとり、カウスの8分法で 20π まで分けたものである。

図-5は各断面における w の r 方向の変化を示したが、表層の弾性係数の小さい場合は、変形は局部的になり、 z の大きさとともに急激に減衰する。また表層の弾性係数の大きな場合は変形が広い範囲にわたり基層への影響も大きい。

図-6は、 σ_z の r 方向の分布である。

この場合変形を同一にしているので、 $E_1 = E_2 = E$ かわら、半無限体の場合が応力は大きく、表層の弾性係数が小さいものが、最も小さい応力分布をしているのは当然である。また z 方向への変化は表層の弾性係数の大きなものほど急激であり、 $z=a$ では半無限体の場合と比べかなり小さくなっている。

6. おまけ 以上多層体の圧入問題について、解析解と数値解を組合せた方法で、2層体の問題を解析した。この種の問題は、応力分布の形状から数値積分の収束が遅いが、この方法ではこの点がかかり改善されると思うが、収束に対する検討はまだ十分ではないので今後の問題である。

参考文献

- 1) J.L.A. ガーリン (佐藤訳): 弾性接触論, 昭和33年
- 2) N.I. Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 1963
- 3) 大久保: 弾性平面にて圧入された半無限体の二次元問題について, 機械学会論文集, 第18巻, 昭和27年
- 4) I.N. Sneddon: Fourier Transforms, 1951.
- 5) 木村: 二層地盤の力性状に關する解析的研究, 建設論集, 第16号, 昭和49
- 6) 宇山: 表面部が剛体で包圍した半無限弾性体の3次元問題, 建設論集, 昭和30年
- 7) 熊野松岡: 層表面に均等力を受けた多層体の応力分布について, 第29回年次学術講演会概要集, 加部, 1974.

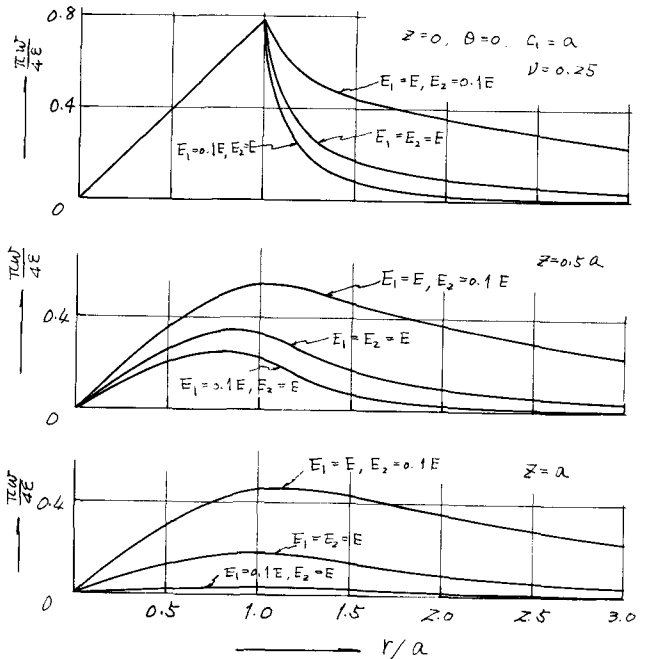


図-5 w の r 方向の変化

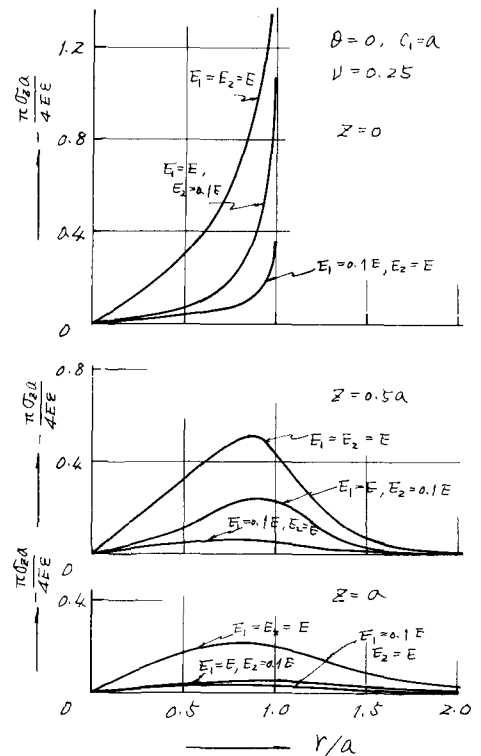


図-6 σ_z の r 方向の分布