

波動理論の適用範囲(理論限界)について

北大工 正眞 佐伯 浩

§1. 緒論. 水の波動運動において、復元力が重力による波は重力波と呼ばれているが、この重力波の進行性の波 (Progressive Wave) の理論は、一般に Bernoulli の式と連続の式より求める事ができる。この進行波は、線形理論と非線形理論に分けられる。線形理論は、微小振幅波と呼ばれ、非線形理論は有限振幅波と呼ばれている。この有限振幅波も我々土木技術者の間で通算使われる理論は、Stokes 波とクノイド波である。以上述べた、線形理論、Stokes 波理論、クノイド波理論は、いずれも Laplace の式と Bernoulli の式より求めるのであるが、その解はそれぞれ異なっている。これは、表面の境界条件の違いによるものである。速度ポテンシャル中を次のように仮定する。

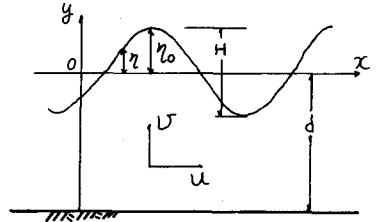


Fig-1

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

線形理論においては、Bernoulli の式における、速度 u = 乗項 $\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\}$ を neglect し、表面条件として、次の式の如く求める。

$$v_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2)$$

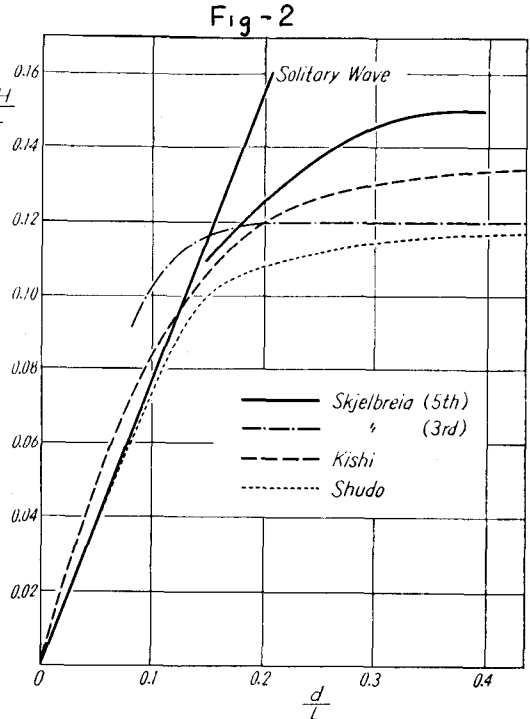
波面では、 $y = \eta$ であるが、式を線形化するために、 $y = \eta$ を $y = 0$ とする。これに対して Stokes 波は、表 $\frac{H}{L}$ 面条件として次式を用いる。

$$v_{y=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3)$$

これに対して、クノイド波は次式を用いる。

$$v_{y=\eta} = u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4)$$

以上のように、表面条件の違いから当然各々の波動理論は、解は異なり、またそれぞれの理論の適用範囲も異なる事となる。また、これらの波動理論は、水深が変化しない場合の式であり、一定水深の所を進行する限り変形しない Permanent Type の波動理論である。また、これらの波動理論における波形をみると、Stokes 波の場合には、理論上、ある条件になると、波の波谷部に、Secondary Wave が発生してくる。この Secondary Wave の事を、Borgman 等は Inflection と称しているが、これが発生する事は、理論の限界を示す事になる。また、クノイド波においては、波動においては (H/d)



Breaking Point of Stokes Wave

が大きくなると当然、無次元波速 $C/\sqrt{gd}$ は大きくなるのであるが、ある条件下では、その逆になる。

以上の事から、波動理論の適用範囲については、次の三つが考えられる。

(1) 波動理論自体が、二次波も発生したり、また波速の値が現実の波と異なった値を示す波動理論自体の適正な範囲、これは、砕波限界も一つの波動理論の適用範囲と考えられる。

(2) 波動理論と実験によっておこされる波の比較から、波動理論が実際の波とよく一致する範囲も適用範囲と考えられる。

(3) 各種の波動理論は Permanent Type である事を仮定しているが、ある条件の波では、水深一定であっても変形する事が知られている事から、変形するかどうかの条件より、波動理論の適用範囲が求まる。

本研究では、Skjelbreia の第 3 近似の Stokes 波理論と、Laitone の第 1、第 2 近似のクノイド波理論の (1) と (3) についての適用範囲について論じる。

§2. 砕波限界 (理論) 水の波は、水珠と周期 (波長) が与えられれば、波高の最大値 (最高波高) が決まる。これは、波の砕波限界に一致する。この事から、波動理論でも砕波限界を次式で計算する事ができる。

$$\left. \begin{aligned} U_{crest} &= C \\ \theta_{crest} &= 120^\circ \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

佐伯等が、Skjelbreia の第 3 近似 Stokes 波理論で計算した結果が Fig-2 である。

Skjelbreia の理論では、 $(d/L) < 0.08$ の範囲では、砕波限界の解は求まるが、実際の波の場合とは異なるために、結果は、 $(d/L) > 0.08$ の範囲だけ示した。この砕波限界は、首藤の求めた値に非常に近い。また $(d/L) \geq 0.2$ では $(H/L) \approx 0.12$ となる。これに対してクノイド波理論の場合には、クノイド波の極限が孤立波である事から、孤立波の砕波限界を求める事と同じ事となる。Laitone の第 2 近似理論の砕波限界は $(H/d) = 0.73$ となり、これより大きくなると、クノイド波は砕波する事となる。

Fig-3

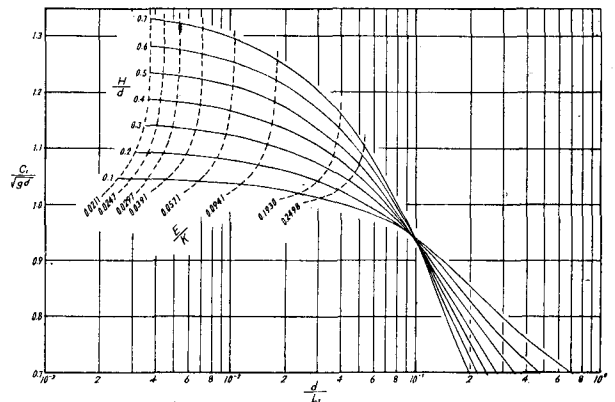
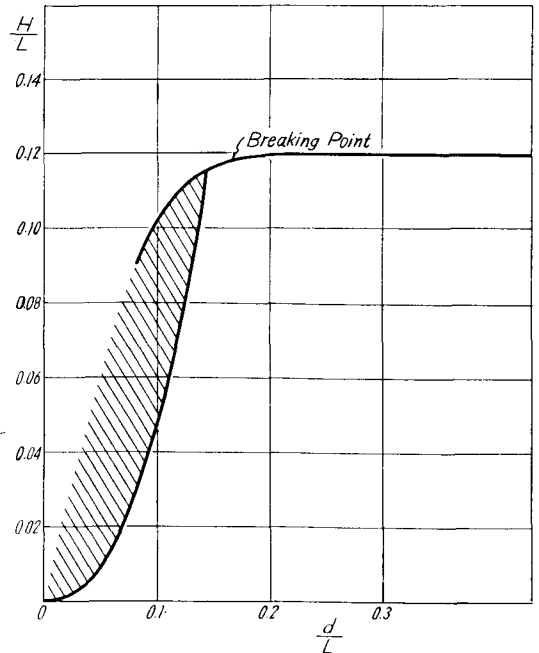


Fig-4

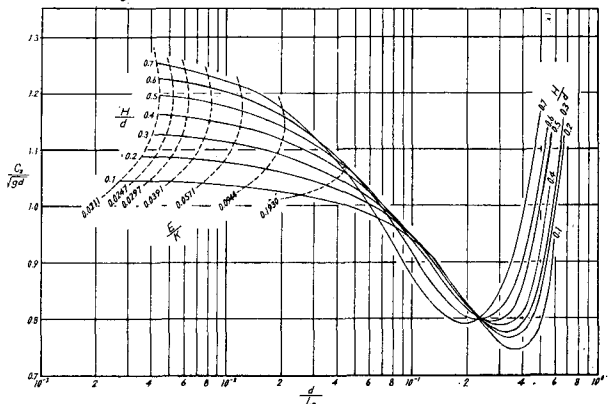


Fig-5

る。この孤立波の破壊限界については、種々の理論によって異なるが下記のような値を示す。

Boussinesq	$(H/d)_{max} = 0.73$
Mc Cowan	$(H/d)_{max} = 0.75$
"	$(H/d)_{max} = 0.78$
Gwyther	$(H/d)_{max} = 0.83$
Davies	$(H/d)_{max} = 0.83$
Packham	$(H/d)_{max} = 1.03$
Chapplelear	$(H/d)_{max} = 0.87$
Laitone	$(H/d)_{max} = 0.73$
Lenau	$(H/d)_{max} = 0.83$
Yamada	$(H/d)_{max} = 0.83$

Fig-6

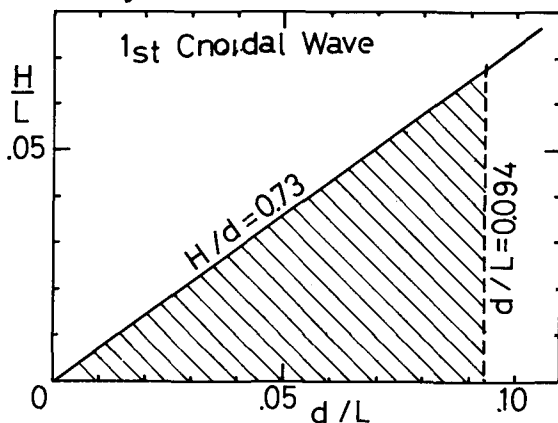
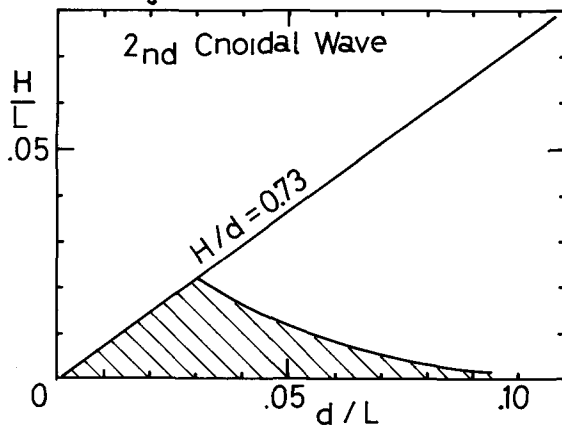


Fig-7

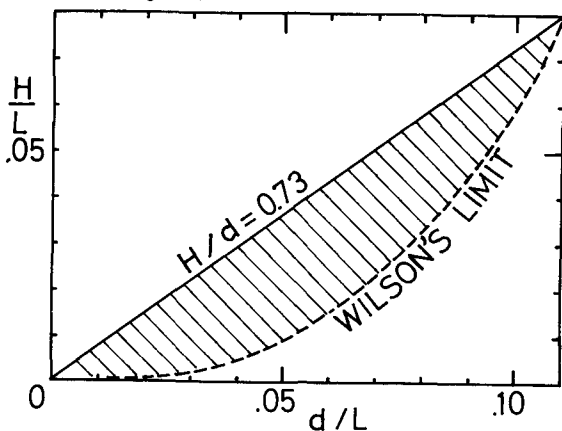


§3. Stokes 波の二次波の発生 Stokes 波の理論においては、ある条件では、波各部に小さな山が発生する。この山を Secondary Wave と云ったり、Inflection Point と云ったりしている。当然この Secondary Wave も、Main Wave と同じ波速で進行する。実験水槽で発生される波においても、これと同じような現象が発生するが、これは Main Wave の速度とは一致していない。ここでは、この二次波の発生領域について調べてみる。佐伯等の計算によると Fig-3 の如くなる。

斜線で示された領域は、二次波が発生する事を意味している。この Fig-3 の Stokes 波の理論的に求めらる適用範囲となる。

§4. クノイド波の波速 クノイド波理論の場合、§3 の Stokes 波とは違って、波速によって理論の適用範囲を調べた。Fig-4、Fig-5 に、クノイド波の第1、第2近似理論の波速を示す。Fig-4 より、第1近似クノイド波理論では、 $(d/L) > 0.094$ の

Fig-8



範囲では (H/d) が大きい程無次元波速 $(C/\sqrt{gd})$ が小さくなる事になり、これは事実と反する事になる。これに対して、Fig-5 の第2近似のクノイド波理論においては、第1近似理論の場合と同じように、 (H/d) が大きい程 $(C/\sqrt{gd})$ が小さくなる現象が起こっている。この (H/d) が大きくなるという条件と、クノイド波の破壊限界より、理論の適用範囲は、図中 (Fig-6)、(Fig-7) の斜線の領域内となる。

以上、幾つか用いている波動理論は変形する事なく進行する波を仮定している。

§5. 波の変形領域 波動理論は、解析の困難さから一般に、Permanent Typeの波を仮定して解を求めている。しかし、現実の波がある領域においては変形する事が知られていた。Wilson 等は水面に衝撃力を加える事によって発生する波の計算から波の進行に伴い変形する領域を次のように定めた。

$$\frac{\rho_0 L^2}{d^3} > 40 \quad (6)$$

(6)式の右をクノイド波理論で計算したものをいうとFig-8の斜線領域が変形を起す範囲となる。

以上の結果と前の§2~§4より、有限振幅波であるStokes波とクノイド波の理論限界は、Fig-9とFig-10で示される。斜線の領域が適用範囲である。Stokes波の場合の二次波の発生限界と(6)式で示される変形領域の式は、非常に近い値を示している。また、クノイド波理論の場合の理論の適用範囲は極めて限られた範囲となる。以上が若くは波動理論の理論上の適用範囲である。

§6. 変形に関する実験結果。 まず、波動理論の基本的な考え方の一つであるPermanent Typeの波の存在範囲を実験により求めた。実験は、長さ24m、幅0.6m、深さ1mの鋼ガラス製造波水路で行なった。水底は、摩擦を小さくするために、PVC板を張った。最近、KDV方程式から波の変形の計算を行なうことが見られるが、これは、Zabusky & Galvin が波浪に対して、KDV方程式を適用し、水の波の場合にも、Solitonが発生する事を確かめて以来の事である。この波が進行するにつれて、分裂が起こり、Solitonが発生する事は明らかに、波が変形する事を示している。また我々が今まで二次波と称していたものも、このSolitonをさしている場合が多いとも思われる。Stokes波におけるSecondary Waveの速度は、Main Waveの速度に一致するのに対して、このSolitonの速度は、Main Waveの速度と異なる。一般にStokes波理論の二次波の発生限界(Inflection Pointの発生限界)が、Two Solitonsの発生条件とよく一致しているために、このように、Secondary Waveの発生と、実験波のSolitonを同一のものと考えた事による。Two Solitons以上のSolitonが発生する条件を実験で調べたものを(H/L)と(d/L)の関係で示した

Fig -9

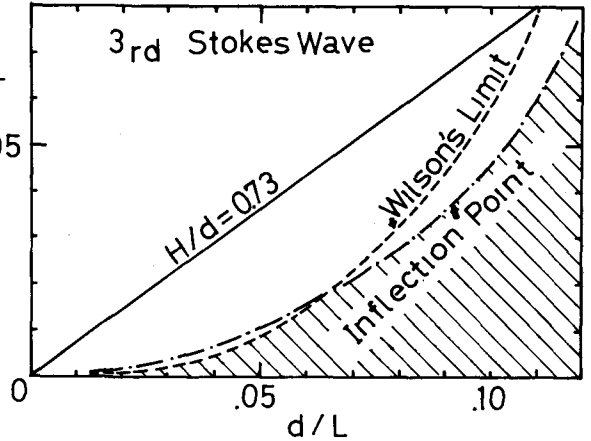


Fig-10

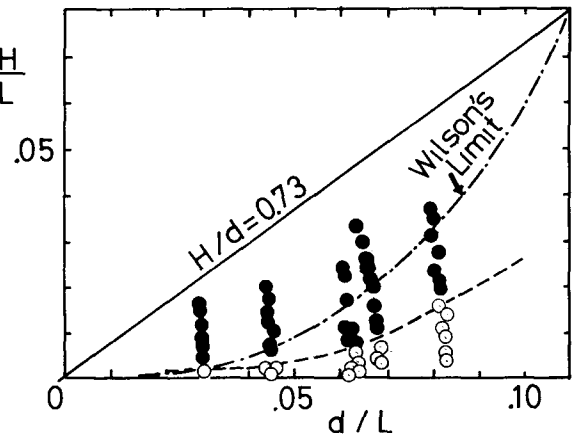
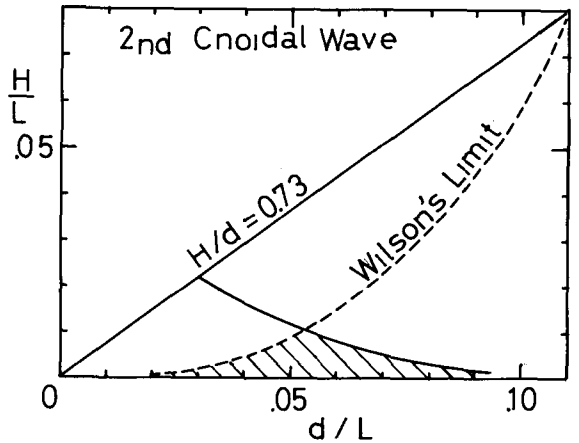


Fig -11

ものを Fig-11 に示す。図中の●印が変形を起す波、○印が変形しない波であり、実験値から、変形の限界を示したものが破線である。これに対して、Impulsive Wave から求めた Wilson の限界式 (6) を一点鎖線とする。これによると明らかなように、Wilson 等が求めた、Permanent Type の波の限界は応ずる事が判る。上記のように Soliton の発生が、波の変形に大きな関係がある。Fig-12 は (d/L) と (H/d) で Soliton の発生数を表わしたもので、この図からも明らかなように、Soliton の発生数は U に大きく関係している事を示している。この U は次式で表わされ Ursell の Parameter に類するものである。

$$U = \frac{HL^2}{d^3} \quad (7)$$

これをさらに明確にするために、 U と Soliton 数の関係を示したものが、Fig-13 である。図中の○印は、中間領域であることを示している。これによると、Permanent Type の波の範囲は

$$\frac{HL^2}{d^3} \leq 22 \quad (8)$$

これらの関係を (H/L) と (d/L) と表わしたものが、Fig-14 である。尚、Wilson の $\frac{20L^2}{d^3} = 40$ は $\frac{HL^2}{d^3} = 60$ に相当する事となる。

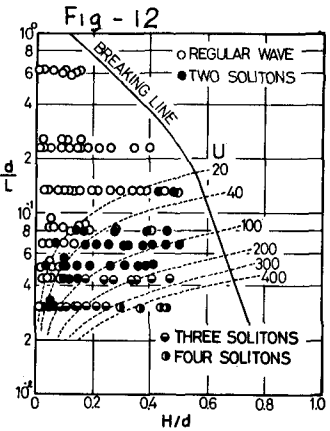


Fig-13

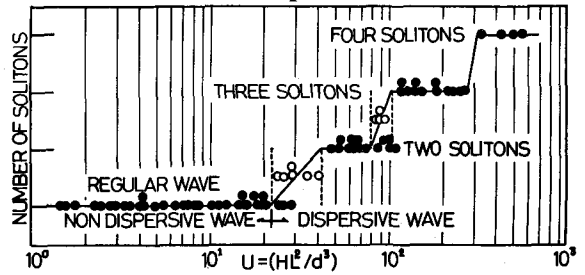
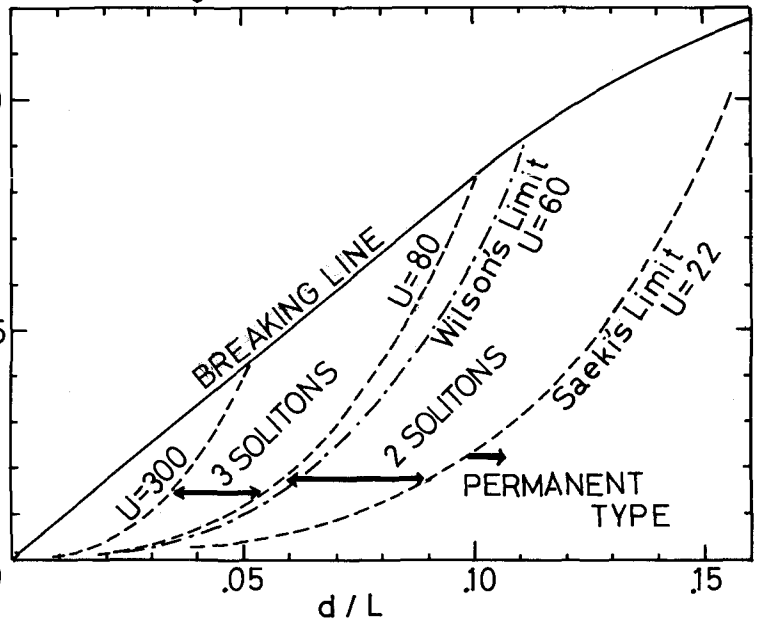


Fig-14



§7. 結論

1. Stokes 波の理論的な適用範囲は、二次波の発生限界と、Permanent Type の限界と破壊限界によって決定される。Skejjelbreia 等が近似理論の場合の二次波発生限界は、 $(HL^2/d^3) = 48$ であり、Permanent Type の限界は $(HL^2/d^3) = 22$ であるから、適用範囲は $(HL^2/d^3) \geq 22$ と破壊限界の波である。

2. クノイド波の理論的な適用範囲は、波速 (H/d) が大きくならない $(C/\sqrt{gd})$ が大きくならない範囲と、Permanent Type の範囲によって決定される事となる。よって、クノイド波理論の厳密な適用範囲は極めて狭くなり、これぐらいの範囲であれば、Linear Theory で充分近似できる範囲となる。

参考文献

1. 佐伯. 泉. 新井. 花安 「ストークス波の適用限界について」 土木学会北海道支部論文集 (1968)
2. 佐伯. 泉. 新井. 「クノイド波理論の二、三の特性と適用限界について」 土木学会北海道支部研究発表会論文集 (1968)
3. Laitone, E. V. 「The Second Approximation to Cnoidal & Solitary Waves」
Jour. of Fluid Mech. (Vol. 9 (1961))
4. Wilson, B. W. L. M. Webb & J. A. Hendrickson
「The Nature of Tsunami」 NESCO Tech. Rep. No. SN 57-2 (1962)