

堤体内浸透流の不定流解析

室蘭工業大学 正員 藤間 聡

1. はじめに

地下水浸透流解析には、最近有限要素法が電子計算機の大型化に伴って開発され広く応用されている。しかしながら定常浸透流解析が大部分で、不定常浸透流解析の例は極めて少なく、またその解析結果の信頼性については殆んど触れられていない現状である。

本研究は、二次元不定常浸透流に関して、所定の水位まで緩降下する場合について、粘性流体を用いて実験を行い自由水面の時間による変形を追跡する。同時に有限要素法により数値計算を行って実験結果と比較検討して、有限要素法の不定常浸透流解析の有効性を確かめるものである。

2. 浸透流実験

2-1 実験装置

浸透流の自由水面形及び流量を実験的に求めるには、普通砂模型が用いられる。しかし不定常浸透流を砂模型で行うと毛管作用の影響が大きく自由水面の移動の判別が不可能となる。自由水面の変位量を可視化するためには、小砂粒の様で大きな粒径のものを使用しなければならず、このため粒子間の空隙が大きくなり慣性項が無視出来なくなることにより、もはやダルシー則は成立しなくなる。本研究では砂模型によらず、粘性流体を用いて実験を行う。実験装置は写真-1及び図-1に示す如く上流、下流側に長さ10.0cm、巾10.0cm、高さ25.0cmの寸法のアクリル製の水槽があり、この両水槽の間に、4.0mmの細管が水平に4.0cm間隔に6本、垂直に2.0cm間隔に10本配置されている。上流側水槽には底面から10、15、20、25cmの位置に排水孔が付設され、下流側水槽は底面から2cm刻みに10cmまで5個、10cmから20cmまで3個の排水孔が付設され動水圧配が0~0.9までの範囲で実験を行うことが出来る。

この浸透水槽内で使用する流体は、細管流がダルシー則を満足する層流になるように強粘性流体(カルボキシメチルセルロース(CMC)2%溶液)を使用した。実験は上流側を白バテでシールドして不透透層とし、下流側に所定の水位を与えたのち、下流側水槽に付設されている排水孔を全開して流出させ、カメラによって時々刻々の自由水面の形状を追跡する。

2-2 実験に関する考察

この実験装置における粘性流の挙動は、ポアジユ流れである。いまこのポアジユ流れをダルシー則を満足する空隙物質内の浸透流に変換することを考える。断面積 μ の細管を流通するポアジユ

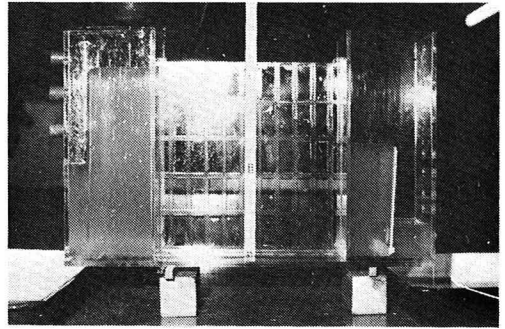
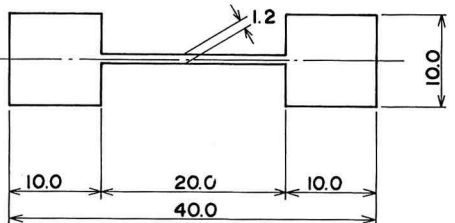
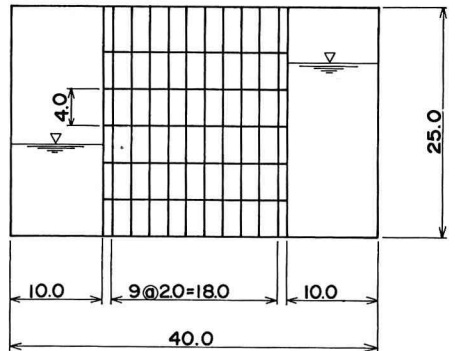


写真-1 浸透流実験装置



UNIT : cm

図-1 実験装置寸法図

流れの流量 q_1 は次式で表わすことができる。

$$q_1 = \frac{\gamma d^2 I}{3\mu} a = K I a \quad \dots (1)$$

I : 動水勾配, γ : 流体の単位重量, μ : 粘性係数

d : 細管の辺長の $1/2$, a : 細管断面積

(1) 式はタルシー則に類似した形となる。

次に図-2 に於て単位巾におけるタルシー式を求める。

$$q_2 = K_2 I a = K_2 I \Delta l' \quad \dots (2)$$

但し (2) 式は水平方向のみを考えている。

いま細管中の流量を $\Delta l'$ 間全体に流通する流量と仮定する。そして動水勾配 $i' = 1$ とする。

$$q_2 = q_1 = K_2 \Delta l' \quad \dots (3)$$

透水係数 K_2 は (3) 式から次のように得られる。

$$K_2 = q_2 / \Delta l' = K a / \Delta l' \quad \dots (4)$$

K_2 は定数 K が判明すると求めることができる。又この浸透流の場合は, $\Delta l \neq \Delta l'$ の場合には異方性と考えることが出来, 垂直方向における透水係数 K_y は次式となる。

$$K_y = K a / \Delta l \quad \dots (4)'$$

定数 K は一種の透水係数と考えられ, この実験装置で求めることが出来る。実験で用いた流体は非常に粘性が強いので, 変水位透水試験の原理を用いる。図-3 に於いて, 両水槽の断面積 A が等しいので, I 水槽内の水位下降速度と II 水槽内の水位上昇速度は等しくなる。それ故この両水位の平均は時間により変位せず一定位置にあるので, II 水槽の始めの水位を讀んでいれば, I 水槽内の水位下降量のみ讀み取ると良いことになる。I 水槽内の単位時間当りの流出量 q_3 は,

$$q_3 = -A \frac{dR}{dt} = -A \frac{d(R_1 - H)}{dt} \quad \dots (5)$$

H : I, II 水槽内の水位の平均値

一方細管内の単位時間当りの流出量は

$$q_4 = K \frac{2(R_1 - H)}{L} a \quad \dots (6)$$

(5), (6) 式を等しいと置いて積分する。

$$-A \int_{R_0-H}^{R_1-H} \frac{d(R_1-H)}{(R_1-H)} = 2K \frac{a}{L} \int_0^t dt \quad \dots (7)$$

$$A \ln \frac{R_0-H}{R_1-H} = 2K \frac{a}{L} t \quad \dots (8) \quad \therefore K = \frac{AL}{2at} \ln \frac{R_0-H}{R_1-H} \quad \dots (9)$$

但し上式中 R_0 : 水槽内の最初的水位 ($t=0$), R_1 : 時刻 t の水位, L : 細管の流路長, a : 細管の断面積。

I 水槽内の水位の下降量の時間による挙動を示したものが図-4 である。同図から降下量は $t=20$ 秒を境にレ

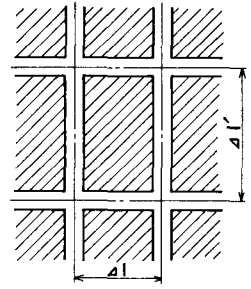


図-2 細管流

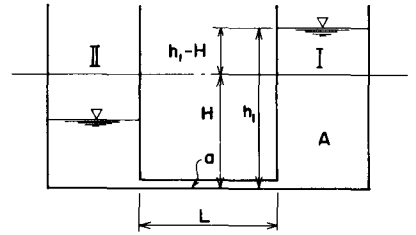


図-3 変水位透水試験装置

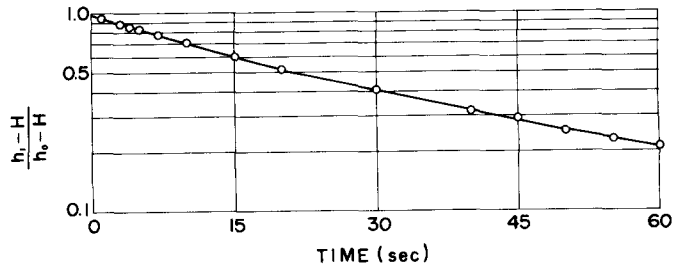


図-4 時間経過による水位減少率

傾向が変り、全域を通して一定値では表わすことができない。 $t = 20$ 秒の時の動水勾配は0.25であるので定数 K を次の様に分類する。

$$i \geq 0.25 \quad K = 2.020 \text{ cm/sec}$$

$$i < 0.25 \quad K = 1.572 \text{ cm/sec}$$

この K の値から透水係数 k_x, k_y は

$$\left. \begin{aligned} i \geq 0.25 \quad k_x &= 0.125 \text{ cm/sec} \\ k_y &= 0.250 \text{ cm/sec} \\ i < 0.25 \quad k_x &= 0.098 \text{ cm/sec} \\ k_y &= 0.196 \text{ cm/sec} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

次にこの実験装置の空隙率 λ は次式により得られる。

$$\lambda = a(\Delta l + \Delta l') / \Delta l \cdot \Delta l' = 0.1875 \dots (11)$$

実験において下流側水槽の排水孔を全閉した場合の水槽内水位の下降状態を図-5に示す。同図から減少量は指数関数的に逓減する傾向を示している。この傾向から実験式を導くと次式となる。

$$t \leq 2.0 \text{ 秒} \quad y(t) = -0.78t + 20.0 \text{ (cm)} \dots (12)$$

$$t > 2.0 \text{ 秒} \quad y(t) = 96.0 / (t + 7.2) + 8.0 \text{ (cm)}$$

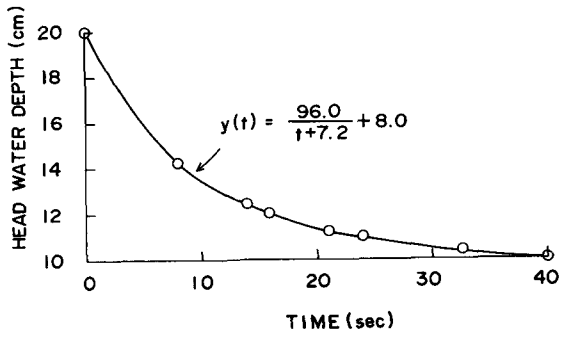


図-5 実験装置における水位減少率

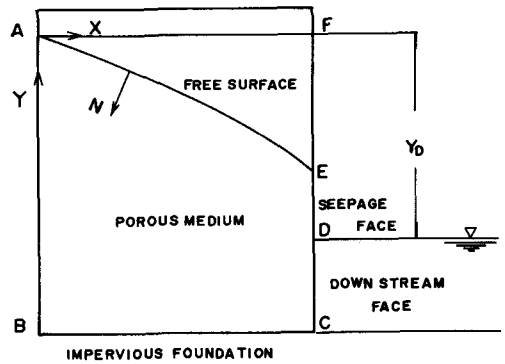


図-6 矩形堤体内の浸透流

3. 数値解析

3-1 浸透理論

有限要素法において用いられる不定常浸透流の支配方程式及び境界条件をこの章において導き、近関数の選択の指針とする。一般的に浸透流は不定常であっても速度の時間的変化が極端に小さいので、近似的には定常的と考える。今不定常浸透流の連続方程式について考えると

$$S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial H}{\partial y}) - q \dots (13)$$

$$S = \rho g \lambda (\beta + \frac{\alpha}{\lambda})$$

S : Theisによる貯留係数, λ : 空隙率
 α : 空隙物質全体の圧縮率, β : 流体の圧縮率
 q : 浸透領域内での水の収支量, H : 水頭値

次に時刻により刻々変化する自由水面についての条件式は、ある時刻 t に自由水面上にあった流体粒子は、微小時間後 Δt においても自由水面上にあることを考慮して次式により得られる。

$$\lambda \frac{\partial H_s}{\partial t} = U_y - U_x \frac{\partial H_s}{\partial x} \dots (14)$$

(14)式中添字 S は自由水面上における諸量を表す。

本実験では $\alpha = 0, q = 0, \beta \neq 0$ と考えられるので、貯留係数 $S = 0$ となり連続方程式は(15)式となる。

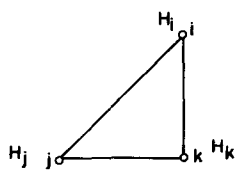
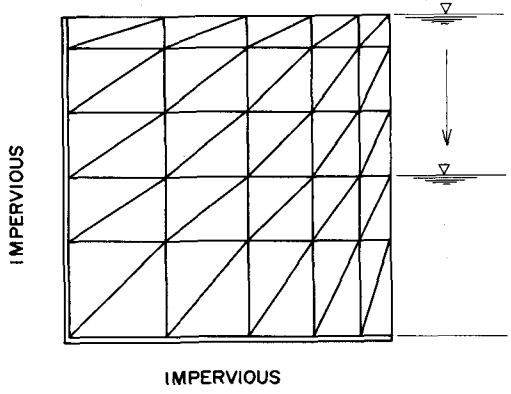


図-7 浸透領域の三角形要素分割

$$\frac{\partial}{\partial x}(R_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(R_y \frac{\partial H}{\partial y}) = 0 \quad \dots (15)$$

不定常浸透流について本研究では、(14)、(15)式を支配方程式として用いることにする。

次に境界条件について考える。図-6において

(1) 下流面 CD :

この面は等ポテンシャル面であるから一定水頭で、下流水深を与える。下流水深は(12)式により求まる。

(2) 浸出面 DE :

この面は大気と接触しているため、大気圧を0と考えると位置水頭のみを与える。

(3) 不透透面 AB, BC :

この面を通して流体の収支がないので、この面に直角な流速は存在しない。

$$U_n = -(R_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + R_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y)) = 0 \quad \dots (16)$$

但し上式中 n は面に対して直角方向を表わす。実験では AB, BC はそれぞれ y 軸及び x 軸に一致するから、

$$AB: \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad BC: \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \dots (16)'$$

以上の式から数値解析に必要な、境界条件支配方程式が得られた。

3-2 有限要素法

有限要素法を用いて、不定流解析を行うには、初期条件としての自由水面形を定常流解析で求めた後、下流水深の降下による水面形の変化を微小時間 Δt (time step) に区切って、その間を定常状態とみなして順次水面形状を求めなければならない。本研究では先に理論を求めたように支配方程式は定流と考えても良いことから、汎関数及び近似関数の取扱いは比較的容易になる。この章では汎関数、近似関数を求める。

いま図-7の如く解析の対象となる浸透領域を三角形の要素群により分割を行う。一つの三角形要素に注目して、三角形の頂点を反時計回りに i, j, k とし、各頂点における水頭値をそれぞれ H_i, H_j, H_k とし、要素内の水頭値 H は次式で表わされるものとする。

$$H = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad \dots (17)$$

(17)式は一次の近似関数であるので、ガレシー則を満足させる浸透の場合における汎関数は計算機内で解を有するため一階微分関数の積分の形であるとする。

$$E = \frac{1}{2} \iint [R_x (\frac{\partial H}{\partial x})^2 + R_y (\frac{\partial H}{\partial y})^2] dx dy \quad \dots (18)$$

(18)式の第一変分を考え、オイラー式と自然境界条件に分ける。

$$\begin{aligned} \delta E = & \iint [R_x \frac{\partial H}{\partial x} \delta H_x + R_y \frac{\partial H}{\partial y} \delta H_y] dx dy = \int_s [R_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + R_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y)] \delta H ds \\ & - \iint_R [\frac{\partial}{\partial x}(R_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(R_y \frac{\partial H}{\partial y})] \delta H dx dy \quad \dots (19) \end{aligned}$$

(19)式において δH は任意にとることのできるため、この式が恒等的に0となるためには、

$$\left. \begin{aligned} R_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + R_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(R_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(R_y \frac{\partial H}{\partial y}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

(20)式から、自然境界条件は不透透面の条件を、オイラーの式は支配方程式をそれぞれ満足することになる。

このことから、水頭が既知の部分の境界条件を与えて、(18)式の E を最小にする水頭値 H を求めると良いことに

なる。それ故に \$E\$ の水頭値 \$H\$ に関する微係数を求め、全要素について微係数の和を 0 にする。

$$\sum \frac{\partial E^0}{\partial H^e} = [R][H] \quad \dots (21)$$

(21) 式において、\$[R]\$ は 3 行 3 列の正方マトリックスで一般に浸透性行列と呼ばれ次式で表わされる。

$$R_{ij} = (R_x(y_R - y_i)(y_j - y_R) + R_y(x_i - x_R)(x_R - x_j)) / 4\Delta \quad \dots (22)$$

上式中 \$\Delta\$ は三角形要素の面積を表わす。

次に自由水面は (14) 式で表わされるが、時々刻々の変位量を求めるため、差分近似式を用いて次式の様に変形する。

$$\lambda \frac{\Delta H_s}{\Delta t} = U_y - U_x \frac{\Delta H_s}{\Delta x} \quad \dots (23)$$

$$\Delta H_s = \frac{\Delta t}{\lambda} (U_y - U_x \frac{\Delta H_s}{\Delta x}) \quad \dots (23)'$$

いま (23)' 式の右辺のカッコ中を考慮してみる。自由水面に垂直方向の速度を \$U_n\$ とすると、

$$\begin{aligned} U_n &= U_y \cos \alpha - U_x \sin \alpha \\ &= [U_y - U_x \frac{\Delta H_s}{\Delta x}] \frac{dx}{ds} \quad \dots (24) \end{aligned}$$

上式中、\$\alpha\$: 自由水面と水平軸との交角

\$S\$: 自由水面のある一稜における接線方向長が得られる。(24) 式から (23)' のカッコの中は水平軸に直角な自由水面を通過する速度を表わすことになる。

$$\text{いま } g = [U_y - U_x \frac{\Delta H_s}{\Delta x}] \quad \dots (25)$$

と置くと、(23)' 式は

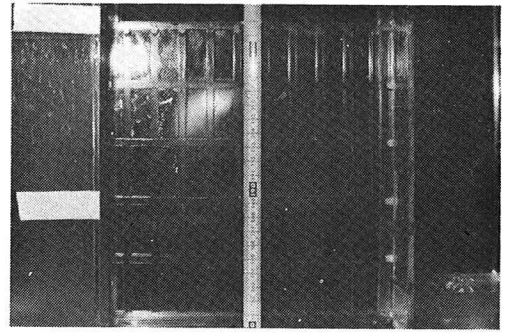
$$\begin{aligned} \Delta H_s &= H_s^{t+\Delta t} - H_s^t = \Delta t \cdot g / \lambda \\ H_s^{t+\Delta t} &= H_s^t + \Delta t \cdot g / \lambda \quad \dots (26) \end{aligned}$$

(26) 式により、鉛直速度 \$g\$ が、また初期自由水面が与えられると \$\Delta t\$ 毎に新しい自由水面が求められる。

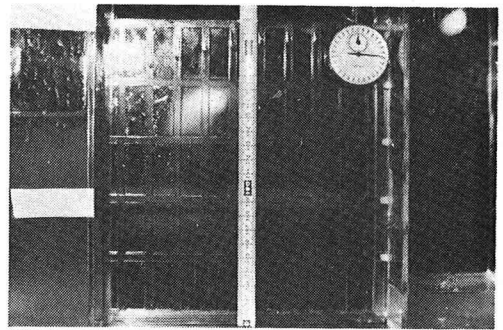
鉛直速度 \$g\$ を求めるには、\$g\$ に自由水面の水平軸方向の長さを乗じると単位巾の流量が求まる。この流量と自由水面を固定して定常流解析を行って得られる流量とを等しく置くことにより決定される。time step \$\Delta t\$ は、計算が安定に付かわれるために次の条件を満足しなければならない。²⁾

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq [g y_{max}]^{1/2} \quad \dots (27)$$

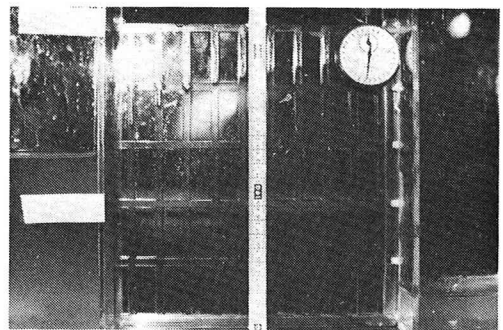
\$\Delta x\$: 分割の水平方向の平均長、\$g\$: 重力加速度
\$y_{max}\$: 最大水深



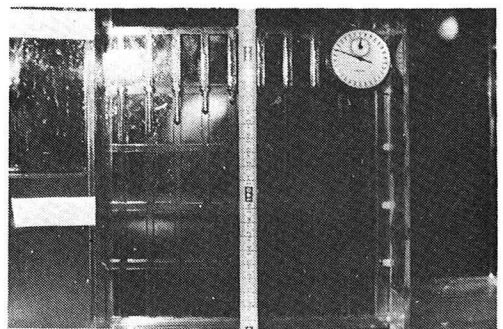
(a) \$t = 0\$ 秒



(b) \$t = 7.8\$ 秒



(c) \$t = 15.8\$ 秒



(d) \$t = 24.0\$ 秒

写真-2 不定常浸透流実験

本計算では $\Delta t = 0.02$ 秒と行った。

4. 実験結果及び数値計算結果の比較検討

実験は2-1で述べた方法により行ない、 $t = 0.0, 7.8, 15.8$ 及び24.0秒における自由水面形は写真-2(a)~(d)に示してある。

この写真から読み取った実験値及び有限要素法により得られた数値計算値を図-8に示す。同図中実線は実験値、黒丸は有限要素法により得られた自由水面の位置を表わす。

この図から実験値と計算値とは良い一致を見え、本研究で行った範囲内では有限要素法は不定常浸透流解析には非常に有効であることが確認された。また図-9には、この粘性流実験装置で行った定常流解析においても、実験値と計算値は良い一致が見られることが示されている。砂模型において行われた有限要素の有効性ととともに、浸透流解析中不均一、異方性をも扱うことができる有限要素法は特に有力な解析法であると言える。

本計算には北大大型計算センターのFACOM 230-75を使用した。

本研究において終始御指導頂いた本学土木工学科近藤徹郎助教授に感謝の意を表します。

最後に本研究の一部に文部省科学研究費の補助を受けたことを記して、関係各位に謝意を表します。

参考文献

1) Verruijt, A., *Theory of Groundwater Flow* (Macmillan) PP.159-173

2) Mc Conquodale, J.A., *Variational Approach to non Darcy flow*

(*Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 96, NO HY11, 1970*)
PP. 2265 - 2278

3) Bear, J., *Dynamics of fluids in porous media* (American Elsevier) PP202-213

4) 藤間 聡, 堤体内の浸透流に関する研究 第29回年次学術講演会講演概要集 土木部門 1974. PP221-222

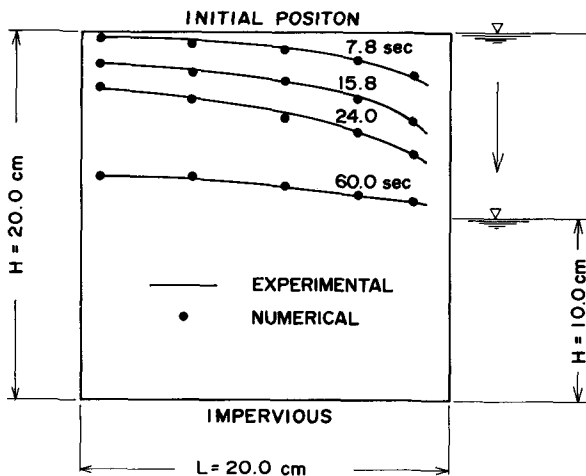


図-8 不定常浸透流の実験結果及び数値計算結果

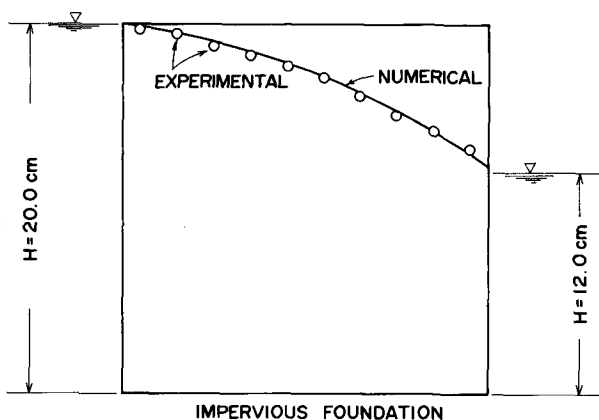


図-9 定常浸透流の実験結果及び数値計算結果