

流域地形構造と統計則(その2)

北海道大学 工学部 正員 藤田睦博

1 はしがき

出水現象の解明にあたり、流域の地形構造と出水特性の関連は、重要な課題であろう。河川流域は、斜面要素とそれらを相互に連絡する河道の2要素より構成されていると考えることができる。特に高水流出のように集中度の高い流出に関する従来の研究は、主として斜面における雨水から流量への変換を対象としており、各斜面の流出水の合成過程についての研究は少なく、最近になり2、3の研究が報告されているのが現状である。

複雑な形状を呈する流域地形を定量的に把握することとは、極めて困難である。したがって流域の地形構造に関する従来の研究は、計量地形学の分野における Horton, Strahler らの河道位数の概念と地形に関する統計則を基本としている。しかしこれらの地形則は、複雑な地形構造を極めて巨視的に表現しているが地形構造と出水特性の関連について考察する場合、必ずしも十分でない。すなわち各種の地形則は、位数毎に地形構造を示す特定の量の平均値間のみの関係式であること。又 Scheidegger, Shreve らが指摘しているように低位数の河道が高位数の河道に合流しても位数がかわらないこと。又経験的に得られている地形則の普遍的吟味及び使用する地形図の縮尺と地形則の関係などである。

5)
筆者は、前年度の報告において河道網にグラフ理論を適用することにより各河道網パターンに新たにその生起確率の概念を導入し、その確率構造を明らかにした。更にこれらの概念を基本として、河道長則、集水面積則の理論的展開を試みたが、必ずしも十分ではなかった。本論文は、地形構造と出水特性を考察する上でその基礎となる地形構造を示す地形則(主として河道長則、集水面積則)を再吟味し前年度報告の不十分な点を補ない、更に用いた2、3の仮定を河道網をシミュレーション法により発生させることにより吟味した。又地形図の縮尺と河道網パターンについて若干の考察をした。

2 河道網パターンの生起確率構造とその相似性

河道が新しく発生する機会とは、全ての河道について等確率であると考え、位数1位の河道数を Z とすると $Z=N$ の流域において、図2.1に示すように最下流の合流点で河道網を切断して、1つの集合に $Z=i$ 、他の集合には $Z=N-i$ となる組合せが生じる確率を $P(i, N)$ 、組合せを $Ps(i, N-i)$ とする。

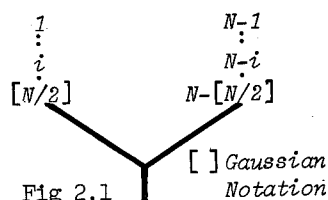


Fig. 2.1

$P(i, N)$ の誘導については、昨年度報告したので結果のみを示す。

$$P(1, N) = \frac{N}{2N-3}$$

$$P(i, N) = \frac{2(2i-3)!N!(N-2)!(2N-2i-2)!}{(i-1)!i!(N-i)!(2N-3)!(N-i-1)!}$$

$$(2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m)$$

$$P(m, 2m) = \frac{8m}{(4m-2)!} \left\{ \frac{(2m-1)!(2m-3)!}{m!(m-2)!} \right\}^2$$

$$(N=2m) \quad (2.1)$$

一方 $Z=N$ よりなる河道網の異なるパターン数を S_N とすると S_N は、次式で示される。

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{[N/2]} S_i S_{N-i} & (N \neq 2m) \\ \sum_{i=1}^{[N/2]-1} S_i S_{N-i+\frac{1}{2}} S_{[N/2]}^{1+S_{[N/2]}} & (N=2m) \end{cases} \quad (2.2)$$

又この異なる S_N 個のパターンを順に並べて j 番目のパターンが生じる確率を P_j^N とする。今 $Ps(i, N-i)$, $i=1, 2, \dots, [N/2]$ の組合せで、最初に現われるパターンの生起確率を求めると、

$$\begin{aligned}
 P(1, N) P_{11}^{1N-1} &= \frac{2^{N-3} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{2} P_1^N \\
 P(i, N) P_{11}^{iN-i} &= \frac{2^{N-4} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{2} P_1^N \\
 (2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m) \\
 P(m, 2m) P_{11}^{m2m} &= \frac{2^{N-5} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{4} P_1^N \\
 (N=2m)
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

したがって最も単純な1番目のパターンが最大の確率で生起する。

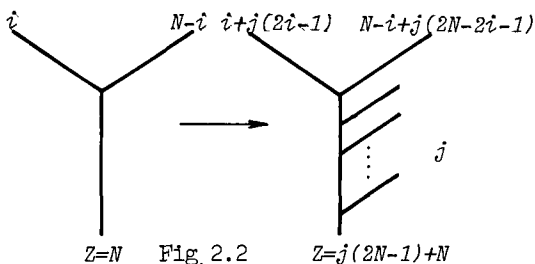
次に地形図の縮尺と各パターンの生起確率構造について考察する。地形図の縮尺の大小により、当然河道網の規模も変化する。地形図は、全て等精度で作成されているものとし、小縮尺になると位数1位、2位、……の河道の順に河道が消失するものとする。ここでは、1位の河道のみが消失する場合を考える。今ある特定の縮尺における $Z = N$ の河道網において、縮尺が大きくなって全ての河道に j 個の新しい河道が現われるものとする。図2.2に示すように $Ps(i, N-i)$ の河道網は、その河道数が $(2N-1)$ だから、 $Z = j(2N-1) + N$ の $Ps(i+j(2i-1), N-i+j(2N-2i-1))$ の河道網になる。 $Z = N$ の時異なるパターン数は、 S_N 個で、 $Z = j(2N-1) + N$ の時の異なるパターン数は、 $S_{j(2N-1)+N} (> S_N)$ であるが、新しく河道が現われたことにより生じるパターンは、 $S_{j(2N-1)+N}$ 個のパターンのうちの特定の S_N 個のパターンである。

$Z = N$ の河道網の各パターンの生起確率は、次式で示

$$P_N = (P_1^N, P_2^N, \dots, P_{S_N}^N) \quad (2.4)$$

される。一方新しく河道が現われたことにより生じる各パターンの生起確率を次式で表わすと

$$T_N = (T_1^N, T_2^N, \dots, T_{S_N}^N) \quad (2.5)$$



T_N についても P_N の計算と同様に次式を、導くことができる。

$$T_N = \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K-2j\} \prod_{i=1}^{[N/2]} P\{(2j+1)i-j, N+j(2N-2)\} [T_i^T T_{N-i}] \quad (2.6)$$

こゝに $[]$ は、次のような変換オペレータを意味する。 T_i は、行ベクトルで定義したので、 $T_i^T T_{N-i}$ はマトリックスとなる。このマトリックスの1行、2行、……の要素を順に並べて行ベクトルにする操作を $[]$ で示す。(2.6)式より

$$T_1^N = P\{j+1, N+j(2N-2)\} \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K-2j\} T_1^{jN-1} \quad (2.7)$$

T_i は、図2.3に示すように $Z = 1$ の河道網に j 個の河道が新しく現われた時の生起確率である。したがって(2.3)の第1式において、 $Z = j+1$ として次式を得る。

$$T_1^j = \frac{2^{j-2} (j+1)! (j-1)!}{(2j-1)!} \quad (2.8)$$

したがって

$$T_1^N = \frac{2^{jN} (j+3) \{(2j+1)N-j\}! \{(2j+1)N-(j+2)\}!}{\{2(2j+1)N-(2j+3)\}!} \quad (N \geq 2) \quad (2.9)$$

又 $Ps(i, N-i)$ $i = 2, 3, \dots, [N/2]$ のパターン群の最初のパターンの各河道に新しく j 個の河道が現われた時の生起確率は

$$P\{(2j+1)i-j, N+j(2N-2)\} \prod_{K=1}^j P\{1, (2j+1)N+K-2j\} \cdot T_1^{iN-i} = \begin{cases} \frac{1}{2} T_1^N & (2 \leq i \leq [N/2], N \neq 2m) \\ \frac{1}{4} T_1^N & (i=m, N=2m) \end{cases} \quad (2.10)$$

(2.3), (2.10)式は、全く同一の結果を示してい

る。このことは、 $Z=N$ からなる河道網のどのパターンにおいても各河道に j 個の河道が新しく発生した時新しいパターンの生起確率の相対的な値が、 $Z=N$ の各パターンの確立構造と全く同一であることを示し、地形図の縮尺に依存しないことを表わしている。

3 河道網と位数

従来の地形図は、位数を独立変数と考えて位数毎に地形構造を表わす諸量を整理していると言っても過言ではない。したがって他の方法による整理をすると、従来の地形図と比較する意味で変換式を必要とする。

$Z=N$ の河道網の最大位数が K となる確率 $Q(K, N)$ については、すでに石原、高棹⁶⁾らが求めている。本論文に示す河道網の識別法でも次のように誘導でき、石原らと同一の結果を得ることができる。

$$Z=N(\geq 2) \text{ の河道網が、とりうる位数 } K \text{ の範囲は} \\ 2 \leq K \leq [\log_2 2N] \quad (3.1)$$

で、 $Q(K, N)$ について次式が成立する。

$$\sum_{K=2}^{[\log_2 2N]} Q(K, N) = 1 \quad (3.2)$$

今 $P_s(i, N-i)$ のパターン群において

$$U_i = [\log_2 2i], \quad U_{N-i} = [\log_2 2(N-i)] \quad (3.3)$$

として、 $P_s(i, N-i)$ の河道網が位数 K をとる確率を $Q_{K,N}^i$ とすると次式を誘導できる。

$$U_i = 1 \quad Q_{K,N}^i = P(i, N) Q(K, N-i) \\ U_i \geq 2 \quad \begin{cases} P(i, N) \{ Q(K, i) \sum_{j=2}^{K-1} Q(j, N-i) + Q(K, N-i) \} \\ N-j \sum_{j=2}^{K-1} Q(j, i) + Q(K-1, i) Q(K-1, N-i) \} \\ P(i, N) Q(K, N-i) \quad (K \geq U_i + 2) \end{cases} \quad (3 \leq K \leq U_i + 1) \quad (3.4)$$

$Q(K, N)$ は、次式で求まる。

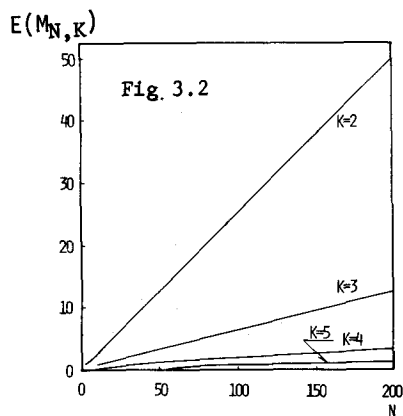
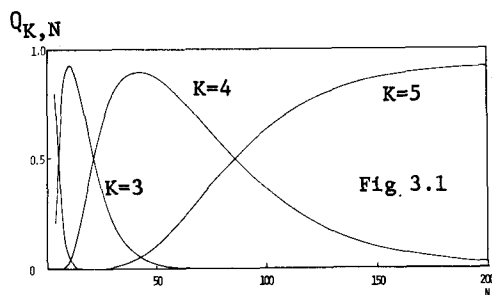
$$Q(K, N) = \sum_{i=1}^{[N/2]} Q_{K,N}^i \quad (3.5)$$

(3.4), (3.5) 式より $Q(K, N)$ について計算した結

果を図 3.1 に示す。又 $Z=N$ の河道網の最大位数を U_N とすると、この流域は位数 $2, 3, \dots, U_N$ の部分流域からなっている。 $M_{N,K}$ を、 $Z=N$ の河道網における位数 K の流域数とすると、 $E\{M_{N,K}\}$ は、

$$E\{M_{N,K}\} = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) [E\{M_{i,K}\} + E\{M_{N-i,K}\} + Q(K-1, N-i) Q(K-1, i)] \\ E\{M_{1,2}\} = 0 \quad E\{M_{2,2}\} = E\{M_{3,2}\} = 1 \\ E\{M_{j,K}\} = 0 \quad j=1, 2, \dots, (2^{K-1}-1) \quad (K \geq 3) \quad (3.6)$$

$E\{M_{N,K}\}$ の計算結果を図 3.2 に示す。



4 流域地形の幾何構造と統計則

流域地形の幾何構造を記述している集水面積則、河道長則は、次式で示される。

$$\bar{A}_K = \bar{A}_1 R_A^{K-1} \quad \bar{L}_K = \bar{L}_1 R_L^{K-1} \quad (4.1)$$

ここに $\bar{A}_K, \bar{L}_K$ は、位数 K の平均的集水面積、河道長を表わす。又 R_A, R_L は、それぞれ集水面積比、河道長比と呼ばれ、一流域においてほぼ 3~5 の一定値をとるとされている。これらの地形図は、物理

的次元をもちその数学的取扱いが困難で、その普遍性が十分に吟味されていない。これらの両地形則は全く同一の数式で表現されているので、両者を区別することなく、位数 K に対応して定まる物理量の期待値が、

(4.1) 式を満足するもの

と考える。

今 $Z = N$ の流域に対応して定まる物理量の期待値を $\bar{Y}_N$ で表わすと、図 4.1 に示すように $Ps(i, N-i)$ の河道網の時、 $\bar{Y}_N$ は $\bar{Y}_i$ 、 $\bar{Y}_{N-i}$ と残流域の $\bar{B}_{i,N}$ から成っている。したがって $\bar{Y}_N$ は、次式で表わせる。

$$\bar{Y}_N = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) (\bar{Y}_i + \bar{Y}_{N-i} + \bar{B}_{i,N}) \quad (4.2)$$

$\bar{B}_N$ を次のようにおく

$$\bar{B}_N = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \bar{B}_{i,N} \quad (4.3)$$

したがって (4.2) 式は

$$\bar{Y}_N = \bar{B}_N + \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) (\bar{Y}_i + \bar{Y}_{N-i}) \quad (4.4)$$

次式を仮定すると

$$\bar{B}_N = B (\text{const.}) \quad (4.5)$$

次式を誘導できる。

$$\bar{Y}_N = (\bar{Y}_1 + B) N - B \quad (4.6)$$

(4.6) 式は、 N と $\bar{Y}_N$ が線形関係にあることを示している。一方 $Z = N$ の流域において、 i 番目のパターンの河道網が j 個の位数 1 位の河道からなる位数 K の部分流域数を、 $C_{N,K,i,j}$ とする。したがって $Z = N$ の流域の位数 K に対応する物理量の総和の期待値 $\bar{X}_{K,N}$ は

$$\begin{aligned} H_{N,K,j} &= \sum_{i=1}^{S_N} C_{N,K,i,j} P_i^N \\ \bar{X}_{K,N} &= \sum_{j=2^{K-1}}^N H_{N,K,j} \bar{Y}_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

$K = 2$ の場合、 $Z = N$ の河道網で $Ps(i, N-i)$ のパターン群は、 $U_i = 1$ の時 $Z = N-i$ の河道網と位数は全て同一だから

$$\bar{X}_{2,N}^i = P(i, N) \left\{ \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j + Q(2, N-i) \bar{Y}_N \right\} \quad (4.8)$$

$U_i = 2$ の時、 $Z = N-i$ の河道網で位数が 2 位のパターンのみが位数 3 となり、3 位以上の位数は変化しないので

$$\begin{aligned} \bar{X}_{2,N}^i &= P(i, N) \{ \bar{Y}_i + Q(2, N-i) \bar{Y}_{N-i} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$U_i \geq 3$ の時

$$\begin{aligned} \bar{X}_{2,N}^i &= P(i, N) \{ Q(2, i) \bar{Y}_i + Q(2, N-i) \bar{Y}_{N-i} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{i-1} H_{i,2,j} \bar{Y}_j + \sum_{j=2}^{N-i-1} H_{N-i,2,j} \bar{Y}_j \} \end{aligned} \quad (4.10)$$

したがって $\bar{X}_{2,N}$ は

$$\bar{X}_{2,N} = \sum_{i=1}^{[N/2]} \bar{X}_{2,N}^i \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{K,N}^i &= P(i, N) \{ Q(K, i) \sum_{l=K}^{U_{N-i}} Q(l, N-i) \bar{Y}_l \\ &\quad + Q(K, N-i) \sum_{l=K}^{U_i} Q(l, i) \bar{Y}_{N-i} + \sum_{j=2}^{i-1} H_{i,K,j} \bar{Y}_j \\ &\quad + \sum_{j=2^{K-1}}^{N-i-1} H_{N-i,K,j} \bar{Y}_j \} \end{aligned}$$

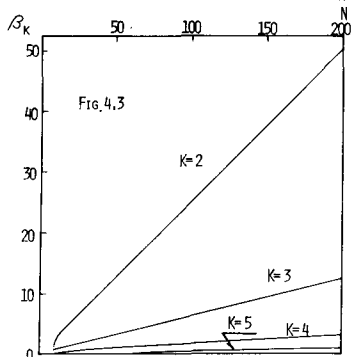
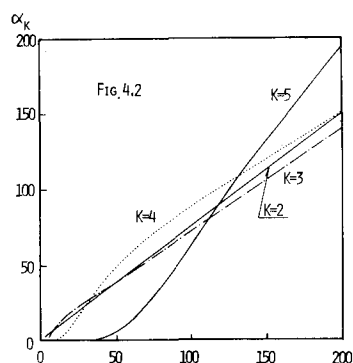
$$\bar{X}_{K,N} = \sum_{i=1}^{[N/2]} \bar{X}_{K,N}^i \quad (K \geq 3) \quad (4.12)$$

(4.6), (4.7) 式より

$$\begin{aligned} \bar{X}_{K,N} &= (\bar{Y}_1 + B) \alpha_K - B \beta_K \\ \alpha_K &= \sum_{j=2^{K-1}}^N j H_{N,K,j} \\ \beta_K &= \sum_{j=2^{K-1}}^N H_{N,K,j} \end{aligned} \quad (4.13)$$

α_K 、 β_K の計算結果を図 4.2, 4.3 に示す。 K の値が増加すると $\alpha_K \geq \beta_K$ となり、(4.13) 式は次のように近似できる。

$$\bar{X}_{K,N} \doteq (\bar{Y}_1 + B) \alpha_K \quad (4.14)$$



一方、 $\bar{X}_{K,N} / E\{M_{N,K}\}$ は、 $Z = N$ の流域における位数 K に対応して定まる物理量の期待値を表わす。したがって河道長比、集水面積比に相当する値 R_K は次式で示される。

$$R_K = \frac{\bar{X}_{K+1,N} / E\{M_{N,K+1}\}}{\bar{X}_{K,N} / E\{M_{N,K}\}} \quad (4.15)$$

(4.14) 式を用いると

$$R_K = \frac{\alpha_{K+1} / E\{M_{N,K+1}\}}{\alpha_K / E\{M_{N,K}\}} \quad (4.16)$$

ただし $K = 1$ の時

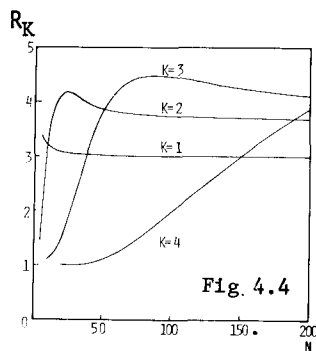
$$\bar{X}_{1,N} = N \bar{Y}_1 \quad (4.17)$$

なので

$$R_1 = \frac{(\bar{Y}_1 + B) \alpha_2 / E\{M_{N,2}\}}{\bar{Y}_1} \quad (4.18)$$

となり、図 4.3 に R_K の計算結果を示す。 R_K は、ほぼ 3 ~ 5 の値をとり従来経験的に得られている結果と一致している。ただし R_1 について (4.18) 式で、 B

の値が未知であるので $B = 0$ として求めた結果、他の R_K と若干異ってくる。

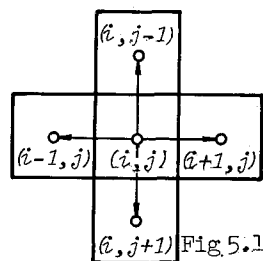


5 河道網のシミュレーション

4 章において、従来の河道長則及び集水面積が理論的に成立することを示した。更に 1 位の河道数 N に注目して整理した物理量の期待値は、 N の 1 乗に比例することを指摘した。しかしこれらの結果は、(4.5) 式の仮定に基づくもので (4.5) 式を吟味する必要がある。地形図より (4.5) 式を吟味するのは、 N の値が増加するとパターン数が幾何級数的に増加し、多大の労力と時間を必要とするのでこゝではシミュレーション法により考察する。

水系発達過程に最初に酔歩モデルを適用した、Leopold, Langbein ら以後多く研究者により推計学的モデルが提案されている。本論文では、樫根らの研究を参考に水流が、図 5.1 に示すように前後左右の 4 方向しか進まないモデルを考えた。計算においては、矩形流域を想定し縦、横をそれぞれ 60, 50 等分してその中央に (i, j) 点があるものとする。計算の手順は、まず河道の出発点を定める。出発点は、流域のどの地点であってもよく i, j にそれぞれ区間 $[1, 60]$, $[1, 50]$ の矩形乱数を発生させることにより

決定する。次に水流が、前後左右に進む確率を表 5.1 のように定め、これらの確率に従って水系を計算上で発達させていく。もし途中で境界又は他の水系に到達すると再び最初にもどり、水流の出発点を決定する。表 5.1 においてタイプ 6 は、水流の方向を選ぶ際タイプ 1 から 5 まで等確率で現われる場合である。図 5.2 はタイプ 6 の計算結果の 1 例である。一方表 5.2 は、



(4・5)式における $\bar{B}_N$ を求めたものである。計算値は、各タイプを5回ずつシミュレーションして、その平均値を求めたものである。表に示されているように各タイプとも $\bar{B}_N$ の値は、Nに無関係であり、(4・5)式の仮定の妥当性を示しているものと思われる。

図5・3は、タイプ6のシミュレーションにおいて、Nと流路長の平均値 $\bar{L}$ との関係をプロットしたものである。 $\bar{L}$ は、Nの1乗に比例していることを示しており、(4・6)式の成立することを示唆しているものと思う。一方筆者が、5万分の1地形図より北海道内の十勝川、天塩川の両河川の上流部において求めたNと平均流路長 $\bar{L}$ 、平均集水面積 $\bar{A}$ を図示した結果を、図5・4に示す。図5・3と同様に $\bar{L}$ 、 $\bar{A}$ ともにNの1乗に比例しており、(4・6)式の成立していることを示している。

6 むすび

本論文は、流域地形の幾何構造を示している集水面積則及び河道長則が理論的に成立していることを示した。又位数1位の河道数Nに注目すると平均的流路長及び集水面積は、Nの1乗に比例することがわかった。今後これらの成果と出水特性の関連について研究したい。最後に研究にあたり御指導いただいた北海道大学工学部山岡教授に謝意を表します。

参考文献

- 1) 石原安雄、小葉竹重機：河道系における洪水の集中過程、第10回災害科学総合シンポジウム講演論文集、1973
- 2) 平野宗夫、小川滋、木川良二：山腹斜面からの流出について、第29回土木学会年講、1974
- 3) 高埴琢馬、椎葉充晴、北村英和：河道分布が出水に及ぼす影響、第29回土木学会年講、1974
- 4) 石原安雄、小葉竹重機：洪水予報における河道網系の役割について、第29回土木学会年講、1974
- 5) 藤田睦博：流域地形構造と統計則、土木学会北海道支部論文報告集、Vol 30、1974
- 6) 石原藤次郎、高埴琢馬、瀬能邦雄：河道配列の統計則に関する研究
京都大学防災研究所年報、12号B、1969
- 7) 梶根勇：河川の樹状発達、数理科学、June、1974、ダイヤモンド社

Table 5.1

Type	Probability			
	Forward	Back	Left	Right
1	0.89	0.01	0.05	0.05
2	0.78	0.02	0.10	0.10
3	0.67	0.03	0.15	0.15
4	0.56	0.04	0.20	0.20
5	0.45	0.05	0.25	0.25
6	Mixed Type from Type 1 to Type 5			

Table 5.2

Type	N	$\bar{B}_N$					
		2	3	4	5	6	7
1		8.34	7.78	8.52	7.68	7.37	7.40
2		4.86	5.31	7.37	5.79	4.04	3.68
3		5.34	4.83	5.59	4.21	5.61	5.22
4		4.13	4.08	4.22	3.83	3.93	4.29
5		3.53	3.42	3.98	3.51	3.56	2.66
6		4.79	4.62	4.94	4.05	5.45	4.68

RIVER NETWORKS

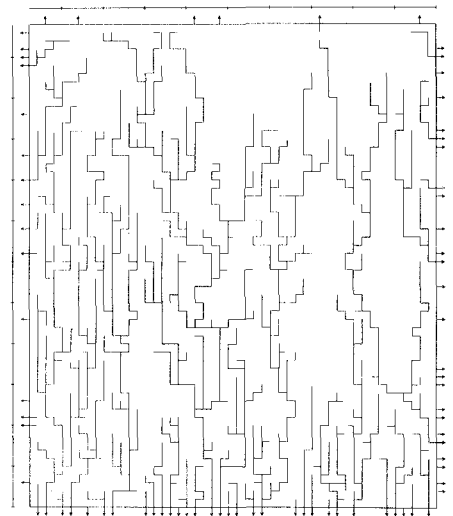
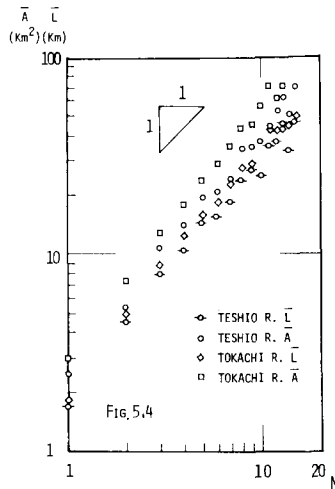
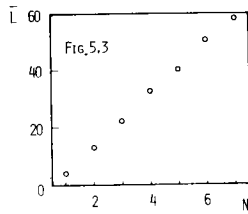


Fig. 5.2