n辺閉合トラバースの角の閉合差の許容限界

北海道産業短期大学　正会員　今井芳雄

§1. 前言

ここでいう閉合トラバースは目でみて閉じているとハッキリわかる閉合多角形は勿論既知方位から出発して既知方位にとりつける結合トラバースも含めてのものである。閉合を1つの条件とするわけである。そこでn辺閉合トラバースの観測角の精度について考えてみる。閉合であるから測角に誤差がなければその多角形の内角の総和$=180°\times(n-2)$でなければならぬ。結合トラバースもこれに似たconstantで処理されるので同様扱いでよい。観測角がこの条件式を満たさぬときは誤差配分に移ってよいかどうかの判定が必要になってくる。本論はこの判定を統一した精度から位置づけようとするものである。誤差配分が終れば補正のすんだ角をもとに緯距，経距を算出するわけである。これらの順序は本論文とて従来と別段変ることはない。角の閉合差は山林原野測量では$90''\sqrt{n}$，平たん地では$60''\sqrt{n}$，市街地では$30''\sqrt{n\text{辺}}$が許容値として云われているが，これは誤差が累積するということだけで，ではこの範囲内の誤差ならば誤差配分のすんだ角はどういう精度（標準偏差の値から推す）になるかという検討が残っておりそれが欲しいわけだが現行では任意の辺数について精度検討に適する簡便な解析式がない様である。筆者は精度算定の一案を得たのでこれを発表し広く利用に至ることを願うわけであります。

§2. 閉合差配分法

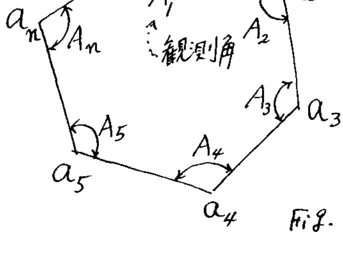

Fig.1

結果式は形は簡単であるが論旨展開の順序として角の閉合差の配分から取りかかることにする。n辺トラバース（閉合）(Fig.1) の観測した内角をA_1，A_2……A_nとおく。然るときこのA_1，A_2，……A_nは誤差を含んでいる。この角誤差をv_1，v_2，……v_nと

おくならば $A+v$ は補正済み角であって

$$(A_1+v_1)+(A_2+v_2)+\cdots\cdots\cdots+(A_n+v_n)-\{180^\circ\times(n-2)\}=0 \cdots\cdots (2.1)$$

が成りたつ可きである (2.1)式を整理すると

$$v_1+v_2+\cdots\cdots\cdots+v_n+A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n-\{180^\circ\times(n-2)\}=0 \cdots\cdots (2.2)$$

今 $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n-\{180^\circ\times(n-2)\}=\omega_n \cdots\cdots (2.3)$

とおき条件関数 ϕ_1 を用いると $\phi_1=v_1+v_2+\cdots v_n+\omega_n=0 \cdots\cdots (2.4)$

が得られる。ここで角 A_1, A_2, …… A_n の観測が一様な観測であり従って weight (重み) は等しいとすると weight は 1 であり 誤差 $v_1, v_2, \cdots\cdots v_n$ の関数 $f(v)$ について $f(v)=(v_1)^2+(v_2)^2+\cdots\cdots\cdots+(v_n)^2=minimum \cdots (2.5)$

は最小自乗法の表現であって $(v)^2$ はいずれも正の数でその和が最小になるためには $f(v)$ の全微分が zero であれば この際充分である

$$\therefore df=\frac{\partial f}{\partial v_1}dv_1+\frac{\partial f}{\partial v_2}dv_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial v_n}dv_n=0 \cdots\cdots (2.6)$$

(2.4)式においては条件式 ϕ_1 は右辺=Zero であるから 直ちにその全微分 $d\phi_1$ について $d\phi_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}dv_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial v_2}dv_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial\phi_1}{\partial v_n}dv_n=0 \cdots\cdots (2.7)$

である. 未定係数に Lagrange Multyplier λ_1 をえらび (2.7) の両辺に乗ずると

$$\lambda_1\cdot d\phi_1=\lambda_1\left\{\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}dv_1+\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial\phi_1}{\partial v_n}dv_n\right\}=0 \cdots\cdots (2.8)$$

$$\therefore (2.6)+(2.8)=0 \cdots\cdots (2.9)$$

が云える $\therefore \frac{\partial f}{\partial v_1}dv_1+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial v_n}dv_n+\lambda_1\left\{\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}dv_1+\cdots\cdots+\frac{\partial\phi_1}{\partial v_n}dv_n\right\}=0 \cdot (2.11)$

$$\therefore\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}\right)dv_1+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial v_n}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_n}\right)dv_n=0 \cdots\cdots (2.12)$$

(2.4)式において $v_1, \cdots v_n$ の n 個すべて独立というわけでなく最後の v_n についてみれば これは残りの $v_1 \cdots\cdots v_{n-1}$ の陰関数となって独立でなくなる。従って (2.12) 式では 式成立に必要な $\left(\frac{\partial f}{\partial v_n}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_n}\right)dv_n=0$ が 直ちに云えない. そこで dv_n の係数が常に zero になる様 λ_1 をえらぶならば $dv_1, \cdots\cdots dv_{n-1}$ は独立であるから (2.12) 式は成立する ためには $dv_1, \cdots\cdots dv_{n-1}$ の係数は dv_n の係数と共にすべて 0 でなければならぬ

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_1}=0, \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial f}{\partial v_n}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial v_n}=0 \cdots\cdots\cdots (2.21)$$

が成り立つことになる．(2.21)の各項に示される偏微分に従って(2.4), (2.5)を偏微分して $\frac{\partial f}{\partial v_1}=2v_1$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial v_1}=1$ となる．これを(2.21)に用いて整理すると

$$\left.\begin{array}{l} v_1=-\frac{1}{2}\lambda_1 \\ \vdots \\ v_n=-\frac{1}{2}\lambda_1 \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.22)$$

が得られる これらの $v_1, \cdots v_n$ と (2.4)式の $\phi_1=0$ の条件式から $\lambda_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdots-\frac{1}{2}\right)+W_n=0 \cdots\cdots (2.23)$

となる。 $\therefore \lambda_1=\frac{2}{n}W_n \cdots\cdots (2.24)$

従って

$$\left.\begin{array}{l} v_1=\frac{1}{2}(-)\lambda_1=\frac{1}{2}(-)\frac{2}{n}W_n=-\frac{W_n}{n} \\ \vdots \\ v_n=\frac{1}{2}(-)\lambda_1=\frac{1}{2}(-)\frac{2}{n}W_n=-\frac{W_n}{n} \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.25)$$

となる．即ち夾角 $A_1, \cdots\cdots A_n$ が等しいweightで観測されているときは誤差（配分）$v_1, \cdots\cdots v_n$ は角閉合差 W_n を n 等分したものでよいことが導かれたわけである。

§3. weight 1 の測定値の平均自乗誤差

1つの観測値 Z_1 がありそのweightを p_1 とするとき量 X_1 について $X_1=p_1\cdot Z_1$ とせば X_1 のweightは1である。§2において $A_1, \cdots A_n$ は1様なweightの観測値として誤差 $v_1, \cdots v_n$ が算出された．これの平均自乗誤差 $\overline{m}$ については

$$\overline{m}=\pm\sqrt{\frac{p_1(v_1)^2+\cdots p_n(v_n)^2}{r}}=\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n}W_n\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}W_n\right)^2}{1}}=\pm\frac{\sqrt{n}}{n}W_n \cdots (3.1)$$

但し $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$．r＝条件式の数＝1．

§4. 最確値 $A+v$ の標準偏差．

誤差 v は条件付最小自乗法によって求めた．今，$\ddot{A}=A+v \cdots\cdots (4.1)$

とおけば $\ddot{A}$ は角 A の最確値 most probable value である．然し乍ら最確値といっても真値でなく依然誤差を含んだ推定値であるわけであるからその信頼度を知るため標準偏差を求める必要がある (4.1)に(2.22), (2.24), (2.3)を入れると

$$\begin{aligned}\ddot{A}_1&=A_1+v_1=A_1+\frac{1}{2}(-)\lambda_1=A_1+\frac{1}{2}(-)\frac{2\cdot W_n}{n}=A_1+(-)\frac{W_n}{n}\\&=A_1+(-)\frac{1}{n}\left\{(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)-180^\circ\times(n-2)\right\}\\&=A_1\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}A_2-\cdots\cdots,-\frac{1}{n}A_n+\frac{1}{n}180^\circ(n-2) \cdots\cdots (4.2)\end{aligned}$$

となる。(4.2)は最確値 $\ddot{A}_1$ が観測角 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ についての一次結合式であることを示している。そこで $\ddot{A}$ のもつ精度(ガウスの正規分布曲線の)を $H_{\ddot{A}}$，$A_1, \cdots\cdots A_n$ の精度を $h_1, h_2, \cdots h_n$ とすれば1様精度の仮定から $h_1=h_2=\cdots\cdots=h_n$ である。一次結合式の誤差伝播法則からこれらの精度の間には

$$\frac{1}{(H_{\ddot{A}})^2}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{h_1^2}+\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{h_2^2}+\cdots\cdots+\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{h_n^2}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2(n-1)}{h_1^2}\cdots\cdots(4.3)$$

両辺の分母を h_1^2 で割れば $\dfrac{1}{\dfrac{(H_{\ddot{A}})^2}{h_1^2}}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2(n-1)}{\dfrac{h_1^2}{h_1^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.4)$

$\dfrac{(H_{\ddot{A}})^2}{(h_1)^2}=P$ とおけば P は規準精度を h_1 とした時の $\ddot{A}$ の weight である。

$$\therefore\ \frac{1}{P}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2(n-1)}{1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

(3.1)式で求めた標準偏差 $\bar{m}$ は weight 1 の観測値群のものであった。更に規準の精度が h_1 であったから $(\bar{m})^2\cdot(h_1)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)$

次に最確値 $\ddot{A}$ のもつ精度(正規分布曲線における)が $H_{\ddot{A}}$ であったから、$\ddot{A}$ のもつ標準偏差を $M_{\ddot{A}}$ とすれば、誤差分布がGaussの正規分布であることから(4.7)式同様

$\ddot{A}_1$ については $\quad (M_{\ddot{A}_1})^2(H_{\ddot{A}_1})^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.8)$

$$\therefore\ (M_{\ddot{A}_1})^2(H_{\ddot{A}_1})^2=(\bar{m})^2(h_1)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.9)$$

$$\therefore\ (M_{\ddot{A}_1})^2=\frac{(h_1)^2}{(H_{\ddot{A}_1})^2}(\bar{m})^2=\frac{1}{P}(\bar{m})^2=\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2(n-1)\right\}\left\{\frac{\sqrt{n}}{n}\omega_n\right\}^2$$

$$=\frac{(n-1)(n-1+1)}{n^2}\cdot\frac{n}{n^2}(\omega_n)^2$$

$$=\frac{n-1}{n^2}\cdot(\omega_n)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.10)$$

$$\therefore\ M_{\ddot{A}_1}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n^2}(\omega_n)^2}=\pm\frac{\sqrt{n-1}}{n}\omega_n\cdots\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

即ち(4.11)式は角の閉合差 ω_n を配分して得られる最確値 $\ddot{A}_1$ がもつ標準偏差を示すものであり、その大いさは専ら当初の閉合差 ω_n に支配されていることがわかる。$M_{\ddot{A}_1}$ は標準偏差であるから最確値 $\ddot{A}_1$ の範囲 $=(A_1+v_1)\pm M_{\ddot{A}_1}$ であって $\ddot{A}_1$ がこの範囲内である確からしさの確率は、正規分布であることから68.3%であると云える。

§5. 三角形の閉合差

三角形の閉合差は多くの測量規定で夫々規制されている。これによって三角測量の精度が表されるからである。閉合差を30″とすればそれの$\frac{1}{3}$づつ即ち10″づつを配分したものは最確値であってそれの標準偏差 M_A' は(4.11)式より

$$M_{A}' = \pm\frac{\sqrt{3-1}}{3}\times 30'' = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\times 30''$$
$$= \pm 14'' \qquad (5.1)$$

§6. n辺形閉合トラバースの許容角閉合差

n辺形閉合トラバースの最確値の精度も14″即ち標準偏差が14秒であるためには(4.11)式から逆算してこれに見合うW_nを角の許容閉合差の目標とすることが出来る。即ち、$W_n = \left(\sqrt{2}\times 10''\right)\times\frac{n}{\sqrt{n-1}}$ ……(6.1)

である。(6.1)を計算すると表6.1になる。

表6.1

辺の数 n	$n/\sqrt{n-1}$	最確値の標準偏差=14″になるための閉合差W_nの値
3	2.12	$W_3=30''$
4	2.31	$W_4=33''$
5	2.5	$W_5=36''$
6	2.7	$W_6=38''$
7	2.9	$W_7=41''$
8	3.0	$W_8=43''$
9	3.2	$W_9=46''$
10	3.3	$W_{10}=47''$

§7. 結言

筆者は基本事項と云えることについても詳述し乍ら(4.11)式を導いたがこれは筆者の発見出来ずじまいであった過誤をみつけて貰いたいためでありました。ここで導いた(4.11)式によればトラバース測量における角の最確値の精度目標が容易に立てられる(結合トラバースでは2つの既知方位から帰納されるW_nということになる)わけだから許容閉合差をただ$\alpha^{秒}\times\sqrt{n}$として$\sqrt{n}$に比例するにまかせたものではトラバースの辺数nが増す程、精度の落ちる測角を目標にすることになる。そうでなく、当初からどういう辺数nであっても、どのトラバースも内容的に同じ精度(M_A'の標準偏差で判定)である様角の閉合差を目標と

して設定してトラバース測量に取りかゝる方が意義のある事であります。
本論は辺数の如何に係らず得られる角の最確値が同一精度に達するには
どすればよいかの手段を与えるものと云えるとおもいます。（1974.9.29.）