I-桁のウェブの座屈に関する一考察

北海道大学 正員　能町 純雄
〃　〃　○堺 孝司

1. まえがき

本論文は，H.G.Vögel が誘導したI-型梁の腹板中における応力分布を平面力とした場合の弾性安定を腹板が上下フランジと両支点の位置で単純支持されているものとして論じたものである。特に，従来，考えられていなかった荷重が下フランジに載荷された場合についても考慮したものである。

2. I-桁のウェブの面内応力

集中荷重，あるいは，部分分布荷重をうける桁のウェブの座屈を考えるには，先ず，これら荷重によるウェブ面内応力を決定しなければならない。この面内応力には H.G. Vögel が導いたものを用いる。彼は，図.1によって示されるように，桁の腹板は，端横断面 $x=0$，l でせん断力によって支えられ，境界 $y=-b/2$，$y=b/2$ で垂直力とせん断力が作用する矩形シャイベとして，又，フランジは，工学的曲げ理論を満足する棒として考えた。更に，フランジに作用する荷重は，外荷重，並びに，シャイベの上下境界にある垂直力とせん断力と大きさ等しく方向逆な力とからなっているものとした。シャイベの応力関数を

$$F(x,y)=\sum_{r=1,2}\frac{1}{\alpha_r^2}\left[A_r\,\mathrm{Ch}\,\alpha_r y+\alpha_r y B_r\,\mathrm{Sh}\,\alpha_r y+C_r\,\mathrm{Sh}\,\alpha_r y+\alpha_r y D_r\,\mathrm{Ch}\,\alpha_r y\right]\sin\alpha_r x$$

と仮定し，境界条件

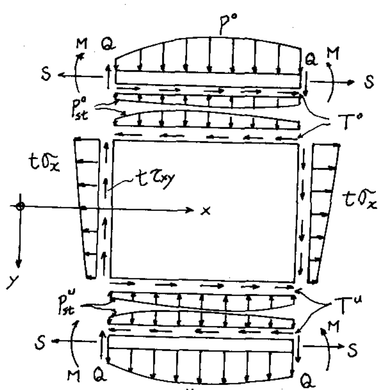

Fig.1

$$T^o=t(\tau_{yx})_{y=-b/2} \qquad T^u=t(\tau_{yx})_{y=b/2}$$
$$P^o_{st}=-t(\sigma_y)_{y=-b/2} \qquad P^u_{st}=-t(\sigma_y)_{y=b/2}$$
$$T^o=-EF_G(u'')_{y=-b/2} \qquad T^u=EF_G(u'')_{y=b/2}$$
$$P^o-P^o_{st}=EI_G(v'''')_{y=-b/2} \qquad P^u+P^u_{st}=EI_G(v'''')_{y=b/2}$$

と，$\sigma_x=\partial^2F/\partial y^2$，$\sigma_y=\partial^2F/\partial x^2$，$\tau_{xy}=\partial^2F/\partial x\partial y$ の関係と，更に，

$$u(x,y)=\frac{1}{E}\left[\int\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dx-\mu\frac{\partial F}{\partial x}+\Phi(y)\right]$$
$$v(x,y)=\frac{1}{E}\left[\int\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dy-\mu\frac{\partial F}{\partial y}+\Psi(x)\right]$$

$\Phi(y)=K_0+K_1y$，$\Psi(x)=K_2-K_1x$ なることを考慮して，実際に積分することによって，未定常数 A_r, B_r, C_r, D_r が求まる。このようにして得られた最終的な応力は，

$$\sigma_x=\sum_{1,3,5}\Big[\frac{W^A_{pr}K^A_r+2W^B_{pr}K^B_r}{N^{AB}_r}\mathrm{Ch}\,\alpha_r y+\frac{W^B_{pr}K^B_r}{N^{AB}_r}\alpha_r y\,\mathrm{Sh}\,\alpha_r y$$
$$+\frac{W^C_{pr}K^C_r+2W^D_{pr}K^D_r}{N^{CD}_r}\mathrm{Sh}\,\alpha_r y+\frac{W^D_{pr}K^D_r}{N^{CD}_r}\alpha_r y\,\mathrm{Ch}\,\alpha_r y\Big]\sin\alpha_r x$$

$$\sigma_y=-\sum_{1,3,5}\Big[\frac{W^A_{pr}K^A_r}{N^{AB}_r}\mathrm{Ch}\,\alpha_r y+\frac{W^B_{pr}K^B_r}{N^{AB}_r}\alpha_r y\,\mathrm{Sh}\,\alpha_r y+\frac{W^C_{pr}K^C_r}{N^{CD}_r}\mathrm{Sh}\,\alpha_r y+\frac{W^D_{pr}K^D_r}{N^{CD}_r}\alpha_r y\,\mathrm{Ch}\,\alpha_r y\Big]\sin\alpha_r x$$

$$\tau_{xy} = -\sum_{r=1,3}\Big[\frac{W_{pr}^A K_r^A + W_{pr}^B K_r^B}{N_r^{AB}} Sh\alpha_r y + \frac{W_{pr}^B K_r^B}{N_r^{AB}}\alpha_r y\, Ch\alpha_r y$$
$$+ \frac{W_{pr}^C K_r^C + W_{pr}^D K_r^D}{N_r^{CD}} Ch\alpha_r y + \frac{W_{pr}^D K_r^D}{N_r^{CD}}\alpha_r y\, Sh\alpha_r y\Big]\cos\alpha_r x$$

ここで，

$$N_r^{AB} = [t + F_G\alpha_r(1+\mu)Cth\omega_r][t\omega_r + I_G\alpha_r^3((1+\mu)\omega_r Cth\omega_r - (1-\mu))]$$
$$-[t\,Cth\omega_r + I_G\alpha_r^3(1+\mu)][t(1+\omega_r Cth\omega_r) + F_G\alpha_r(2Cth\omega_r + (1+\mu)\omega_r)]$$

$$N_r^{CD} = [t + F_G\alpha_r(1+\mu)Th\omega_r][t\omega_r + I_G\alpha_r^3((1+\mu)\omega_r\cdot Th\omega_r - (1-\mu))]$$
$$-[t\,Th\omega_r + I_G\alpha_r^3(1+\mu)][t(1+\omega_r Th\omega_r) + F_G\alpha_r(2Th\omega_r + (1+\mu)\omega_r)]$$

$$K_r^A = [t(1+\omega_r Cth\omega_r) + F_G\alpha_r(2Cth\omega_r + (1+\mu)\omega_r)]/Sh\omega_r$$
$$K_r^C = [t(1+\omega_r Th\omega_r) + F_G\alpha_r(2Th\omega_r + (1+\mu)\omega_r)]/Ch\omega_r$$
$$K_r^B = [t + F_G\alpha_r(1+\mu)Cth\omega_r]/Sh\omega_r,\quad K_r^D = [t + F_G\alpha_r(1+\mu)Th\omega_r]/Ch\omega_r$$

又，部分分布荷重に対して

$$W_{pr}^A = -\frac{2}{\pi}(p^o - p^u)\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi c}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^B = +\frac{2}{\pi}(p^o - p^u)\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi c}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^C = +\frac{2}{\pi}(p^o + p^u)\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi c}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^D = -\frac{2}{\pi}(p^o + p^u)\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi c}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$

集中荷重に対して

$$W_{pr}^A = -\frac{P^o - P^u}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^B = +\frac{P^o - P^u}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^C = +\frac{P^o + P^u}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$
$$W_{pr}^D = -\frac{P^o + P^u}{\ell}\sin\frac{r\pi}{2}$$

となり，$\alpha_r = r\pi/\ell$，$\omega_r = \alpha_r b/2$，I_G = フランジの断面二次モーメント，F_G = フランジの断面積，C = 荷重分布幅，t = 腹板厚，E = 弾性係数，μ = ポアソン比である。

3. Ritzの方法による座屈問題の解法

ウェブが座屈した時の座屈曲面は，周辺単純支持の条件を考慮すると

$$w = \sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

と仮定出来る。

外荷重によって平板に貯えられた歪エネルギーと外荷重のなす仕事とは等しいという条件は，弾性安定問題の場合，エネルギーの第2変分を0にすることである。すなわち，

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^\ell\!\!\int_0^b\Big\{t[\sigma_x(\dot w)^2 + \sigma_y(w')^2 + 2\tau_{xy}\dot w w'] + K[(\ddot w + w'') - 2(1-\mu)(\dot w^2 w'^2 - \dot w'^2)]\Big\}dxdy$$
$$= 0$$

ここで，$\dot w = \partial w/\partial x$，$w' = \partial w/\partial y$，$K = Et^3/12(1-\nu^2)$

Ritzの方法によれば

$$\frac{\partial\delta^2\Pi}{\partial A_{mn}} = 0$$

先に求めた σ_x, σ_y, τ_{xy} を $\delta^2\Pi$ に代入し，実際に積分をし，しかる後に，A_{mn} について偏微分すると次のような座屈係数マトリックスを得る。

$$A_{mn}T_{mnmn} + \frac{tP}{K}\sum_{p}\sum_{q} A_{pq}B_{mnpq} = 0$$

ここで

$$T_{mnmn} = \frac{\ell b}{4}\left\{\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2$$

$$B_{mnpq} = B^{(1)}_{mnpq} + B^{(2)}_{mnpq} + B^{(3)}_{mnpq} + B^{(4)}_{mnpq}$$

$$B^{(1)}_{mnpq} = \alpha_p\alpha_m\sum_{r=1,3} H^{(1)}_{r,m,p}\left(A_{r1}R^{(1)}_{r,n,q} + A_{r2}\alpha_r S^{(1)}_{r,n,q} + A_{r3}R^{(2)}_{r,n,q} + A_{r4}\alpha_r S^{(2)}_{r,n,q}\right)$$

$$B^{(2)}_{mnpq} = \alpha_q\alpha_n\sum_{r=1,3} H^{(2)}_{r,m,p}\left(B_{r1}R^{(3)}_{r,n,q} + B_{r2}\alpha_r S^{(3)}_{r,n,q} + B_{r3}R^{(4)}_{r,n,q} + B_{r4}\alpha_r S^{(4)}_{r,n,q}\right)$$

$$B^{(3)}_{mnpq} = \alpha_q\alpha_m\sum_{r=1,3} H^{(3)}_{r,m,p}\left(C_{r1}R^{(5)}_{r,n,q} + C_{r2}\alpha_r S^{(5)}_{r,n,q} + C_{r3}R^{(6)}_{r,n,q} + C_{r4}\alpha_r S^{(6)}_{r,n,q}\right)$$

$$B^{(4)}_{mnpq} = \alpha_p\alpha_n\sum_{r=1,3} H^{(4)}_{r,m,p}\left(C_{r1}R^{(7)}_{r,n,q} + C_{r2}\alpha_r S^{(7)}_{r,n,q} + C_{r3}R^{(8)}_{r,n,q} + C_{r4}\alpha_r S^{(8)}_{r,n,q}\right)$$

$$H^{(1)}_{r,m,p} = \left(-W_{r,m,p} + X_{r,m,p} - Y_{r,m,p} - Z_{r,m,p}\right) \quad H^{(2)}_{r,m,p} = \left(W_{r,m,p} - X_{r,m,p} - Y_{r,m,p} - Z_{r,m,p}\right)$$

$$H^{(3)}_{r,m,p} = \left(-W_{r,m,p} + Z_{r,m,p} - X_{r,m,p} - Y_{r,m,p}\right) \quad H^{(4)}_{r,m,p} = \left(-W_{r,m,p} + Y_{r,m,p} - X_{r,m,p} - Z_{r,m,p}\right)$$

$$W_{r,m,p} = \frac{(-1)^{(r+m+p)} - 1}{4(\alpha_r + \alpha_m + \alpha_p)}, \quad X_{r,m,p} = \frac{(-1)^{(-r+m+p)} - 1}{4(-\alpha_r + \alpha_m + \alpha_p)} \quad (r \neq m+p)$$

$$Y_{r,m,p} = \frac{(-1)^{(r-m+p)} - 1}{4(\alpha_r - \alpha_m + \alpha_p)} \quad (r+p \neq m), \quad Z_{r,m,p} = \frac{(-1)^{(r+m-p)} - 1}{4(\alpha_r + \alpha_m - \alpha_p)} \quad (r+m \neq p)$$

$(n+q)$ が偶数のとき

$$S^{(1)}_{r,n,q} = b\alpha_r\,Ch\,w_r\left[-P_{r,n,q} + Q_{r,n,q}\right] + 4\,Sh\,w_r\left[\left(\alpha_r^2 - (\alpha_n+\alpha_q)^2\right)P^2_{r,n,q} - \left(\alpha_r^2 - (\alpha_n-\alpha_q)^2\right)\cdot Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(2)}_{r,n,q} = b\alpha_r\,Ch\,w_r\left[P_{r,n,q} + Q_{r,n,q}\right] - 4\,Sh\,w_r\left[\left(\alpha_r^2 - (\alpha_n+\alpha_q)^2\right)P^2_{r,n,q} + \left(\alpha_r^2 - (\alpha_n-\alpha_q)^2\right)\cdot Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(3)}_{r,n,q} = -b\,Ch\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P_{r,n,q} + (\alpha_n-\alpha_q)Q_{r,n,q}\right] + 8\alpha_r\,Sh\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P^2_{r,n,q} + (\alpha_n-\alpha_q)\cdot Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(2)}_{r,n,q} = S^{(4)}_{r,n,q} = S^{(6)}_{r,n,q} = 0, \quad S^{(7)}_{r,n,q} = S^{(5)}_{r,q,n}, \quad S^{(8)}_{r,n,q} = S^{(6)}_{r,q,n}$$

$$R^{(1)}_{r,n,q} = 2\alpha_r\,Sh\,w_r\left[-P_{r,n,q} + Q_{r,n,q}\right], \quad R^{(3)}_{r,n,q} = 2\alpha_r\,Sh\,w_r\left[P_{r,n,q} + Q_{r,n,q}\right]$$

$$R^{(5)}_{r,n,q} = -2\,Sh\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P_{r,n,q} + (\alpha_n+\alpha_q)\cdot Q_{r,n,q}\right]$$

$$R^{(7)}_{r,n,q} = -2\,Sh\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P_{r,n,q} + (\alpha_q-\alpha_n)\,Q_{r,n,q}\right]$$

$$R^{(2)}_{r,n,q} = R^{(4)}_{r,n,q} = R^{(6)}_{r,n,q} = R^{(8)}_{r,n,q} = 0$$

$(n+q)$ が奇数のとき

$$S^{(2)}_{r,n,q} = b\alpha_r\,Sh\,w_r\left[P_{r,n,q} - Q_{r,n,q}\right] + 4\,Ch\,w_r\left[-\left(\alpha_r^2 - (\alpha_n+\alpha_q)^2\right)P^2_{r,n,q} + \left(\alpha_r^2 - (\alpha_n-\alpha_q)^2\right)Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(4)}_{r,n,q} = -b\alpha_r\,Sh\,w_r\left[P_{r,n,q} + Q_{r,n,q}\right] + 4\,Ch\,w_r\left[\left(\alpha_r^2 - (\alpha_n+\alpha_q)^2\right)P^2_{r,n,q} + \left(\alpha_r^2 - (\alpha_n-\alpha_q)^2\right)Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(6)}_{r,n,q} = b\,Sh\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P_{r,n,q} + (\alpha_n-\alpha_q)Q_{r,n,q}\right] - 8\alpha_r\,Ch\,w_r\left[(\alpha_n+\alpha_q)P^2_{r,n,q} - (\alpha_n-\alpha_q)\,Q^2_{r,n,q}\right]$$

$$S^{(1)}_{r,n,q} = S^{(3)}_{r,n,q} = S^{(5)}_{r,n,q} = 0, \quad S^{(7)}_{r,n,q} = S^{(5)}_{r,q,n}, \quad S^{(8)}_{r,n,q} = S^{(6)}_{r,q,n}$$

$$R^{(2)}_{r,m,q} = 2\alpha_r Ch\omega_r \left[P_{r,m,q} - Q_{r,m,q} \right] \quad , R^{(4)}_{r,m,q} = -2\alpha_r Ch\omega_r \left[P_{r,m,q} + Q_{r,m,q} \right]$$
$$R^{(6)}_{r,m,q} = 2Ch\omega_r \left[(\alpha_m + \alpha_q) P_{r,m,q} - (\alpha_m - \alpha_q) Q_{r,m,q} \right]$$
$$R^{(8)}_{r,m,q} = 2Ch\omega_r \left[(\alpha_n + \alpha_q) P_{r,m,q} + (\alpha_q - \alpha_n) Q_{r,m,q} \right]$$
$$R^{(1)}_{r,m,q} = R^{(3)}_{r,m,q} = R^{(5)}_{r,m,q} = R^{(7)}_{r,m,q} = 0$$

$$P_{r,m,q} = 1/2\left[\alpha_r^2 + (\alpha_m + \alpha_q)^2\right] \quad , \quad Q_{r,m,q} = 1/2\left[\alpha_r^2 + (\alpha_m - \alpha_q)^2\right]$$
$$A_{r1} = \left(W^A_{pr}K^A_r + 2W^B_{pr}K^B_r\right)/N^{AB}_r \ , \ A_{r2} = W^B_{pr}K^B_r/N^{AB}_r \ , \ A_{r3} = \left(W^C_{pr}K^C_r + 2W^D_{pr}K^D_r\right)/N^{CD}_r$$
$$A_{r4} = W^D_{pr}K^D_r/N^{CD}_r \ , \ B_{r1} = -W^A_{pr}K^B_r/N^{AB}_r \ , \ B_{r2} = -W^B_{pr}K^B_r/N^{AB}_r$$
$$B_{r3} = -W^C_{pr}K^C_r/N^{CD}_r \ , \ B_{r4} = -W^D_{pr}K^D_r/N^{CD}_r \ , \ C_{r1} = -\left(W^A_{pr}K^A_r + W^B_{pr}K^B_r\right)/N^{AB}_r$$
$$C_{r2} = -W^B_{pr}K^B_r/N^{AB}_r \ , \ C_{r3} = -\left(W^C_{pr}K^C_r + W^D_{pr}K^D_r\right)/N^{CD}_r \ , \ C_{r4} = -W^D_{pr}K^D_r/N^{CD}_r$$

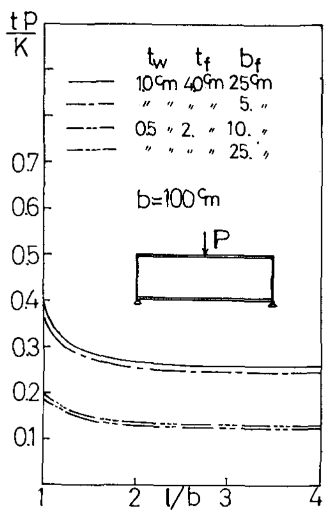

Fig.2

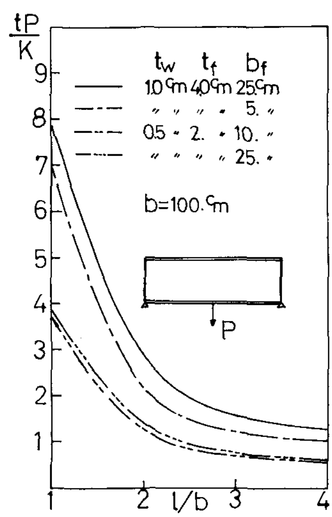

Fig.3

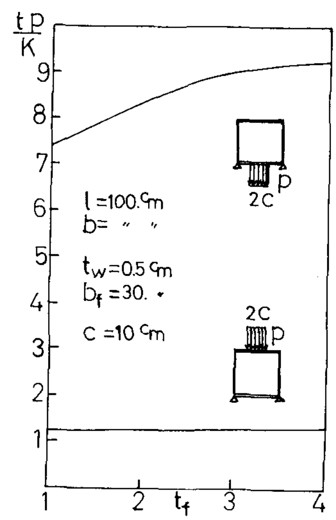

Fig.4

4. 数値計算例

図. 2, 3, 4, 5に数値計算結果を示す。下フランジに載荷した場合が，上フランジに載荷した場合より，図に示すような安定度を有することがわかった。計算では，応力分布に関する精度は，$\gamma = 200$ 項まで，又，m, n については，$\alpha = l/b = 1, 2, 3, 4$ に対して，それぞれ $m=3\ n=3$，$m=5\ n=3$，$m=9\ n=3$，$m=11\ n=3$ までとれば十分であることを確認した。

尚，計算には，北大大型計算機センター FACOM 230-60 を使用した。

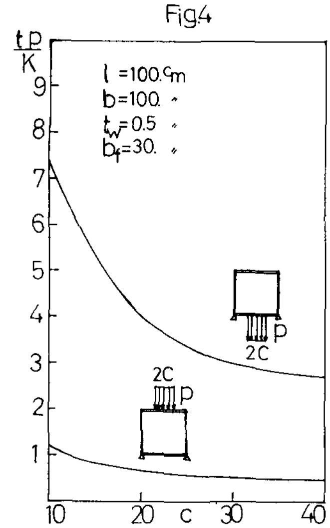

Fig.5

(参考文献)

(1) H.G. Vögel ; Der Stahlbau , Heft 8 (1972) p225

(2) S.P. Timoshenko and J.M. Gere ; Theory of Elastic Stability