

有限変形を考慮したトラス構造物の最適設計

室蘭工業大学 正員 杉本博之

1. まえがき

最適設計法の研究の歴史は非常に新しいが、土木、造船、建築等各方面で精力的になされており、実用化されているものもかなりある。

トラス構造物の最適設計では、比較的小規模で弾性的挙動を示す構造に關しては、細部の問題を残して、十分実用的であるが、長大トラス橋あるいは非線形的挙動を示す構造については、まだ未解決であると思われる。

筆者らは、柔構造(吊橋等)あるいは長大アーチ系橋梁等の実用的最適設計法の開発を目的としているが、本論文では、その際問題になると思われる有限変形の影響を考慮した最適設計法を、簡単なトラス構造物に適用し、その過程および結果を報告するものである。

2. 有限変形法

材料は弾性であると考え、変形後の状態で平衡条件、材料の弾性条件および適合条件と正確に満足する剛性マトリクスは、厳密式であると思われる。

図-1において、 X, Y ; 外力, x, y ; 節点座標, u, v ; 節点変位, l ; 部材長, F ; 内力, A ; 部材断面積, E ; ヤング率, また、*のついた記号は、変形後のものであるとする。

座標は、図-2の方向を正とする。

変形後の状態での平衡条件は、

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & X_j & Y_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\cos \alpha^* & \sin \alpha^* & \cos \alpha^* & -\sin \alpha^* \end{bmatrix}^T F_{ij} \quad (1)$$

材料の弾性条件より、

$$F_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}^*} (l_{ij}^* - l_{ij}^0)$$

変形の適合条件は、

$$\Delta l_{ij} = l_{ij}^* - l_{ij}^0 = \begin{bmatrix} -\cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} & -\sin \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

以上の3条件式より、次式が誘導される。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha^* \\ \sin \alpha^* \\ \cos \alpha^* \\ -\sin \alpha^* \end{bmatrix} \times \frac{EA_{ij}}{l_{ij}^*} \times \begin{bmatrix} -\cos \tilde{\alpha} \\ \sin \tilde{\alpha} \\ \cos \tilde{\alpha} \\ -\sin \tilde{\alpha} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $\cos \tilde{\alpha}$, $\sin \tilde{\alpha}$ は以下のようにして求めることができる。

図-3において、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}^0 &= x_j^0 - x_i^0, & \tilde{y}^0 &= y_j^0 - y_i^0 \\ \tilde{u} &= u_j - u_i, & \tilde{v} &= -v_j + v_i \\ \tilde{\alpha}^* &= \tilde{\alpha}^0 + \tilde{u}, & \tilde{y}^* &= \tilde{y}^0 + \tilde{v} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と考えると、

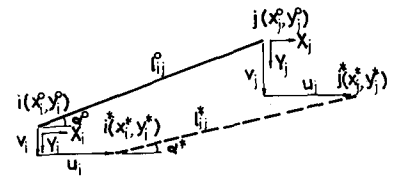


図-1

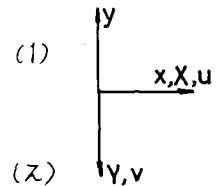


図-2

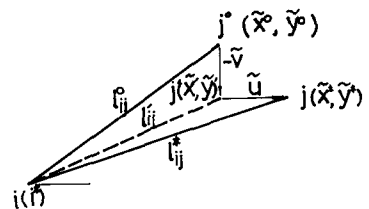


図-3

$\Delta l_{ij} = l_{ij}^* - l_{ij}^0 = (l_{ij}^* - l_{ij}') + (l_{ij}' - l_{ij}^0) = \Delta l_{ij}^u + \Delta l_{ij}^v$ (6)
 となり、節点変位による部材の伸びは、水平、垂直方向をそれぞれ拘束して変形させた場合の伸びの和であることわかる。

たとえば、 Δl_{ij}^v は、図-4において正弦定理等を用いることにより、次のように誘導することとできる。

$$\Delta l_{ij}^v = l' - l^0 = \tilde{v} \times \frac{\tilde{y}^0 + \tilde{v}/\alpha}{(l^0 + l')/\alpha} \quad (7)$$

同様に、 Δl_{ij}^u は次のようになる。

$$\Delta l_{ij}^u = l^* - l' = \tilde{u} \times \frac{\tilde{x}^0 + \tilde{u}/\alpha}{(l' + l^*)/\alpha} \quad (8)$$

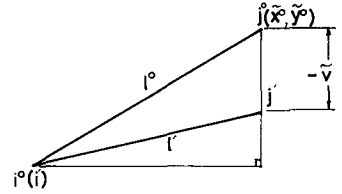


図-4

よって、式(6)より、部材の伸び Δl_{ij} は、次のように表わすこととできる。

$$\Delta l_{ij} = \frac{\tilde{x}^0 + \tilde{u}/\alpha}{(l' + l^*)/\alpha} \times \tilde{u} + \frac{\tilde{y}^0 + \tilde{v}/\alpha}{(l^0 + l')/\alpha} \times \tilde{v} \quad (9)$$

ここで、

$$\Delta l_{ij}' = \frac{\tilde{x}^0 + \tilde{u}/\alpha}{(l' + l^*)/\alpha} \times \tilde{u} + \frac{\tilde{y}^0 + \tilde{v}/\alpha}{(l^0 + l')/\alpha} \times \tilde{v} \quad (10)$$

なる値を考え、式(9)-式(10)を計算すると、

$$\Delta l_{ij} - \Delta l_{ij}' = 0$$

となり、式(10)も節点変位と部材の伸びの関係を表わす厳密式であることとわかる。この結果は、すでに導かれているもの⁽¹⁾と一致する。

式(3)および式(10)より、 $\cos \tilde{\alpha}$ 、 $\sin \tilde{\alpha}$ は次のように定義することとできる。

$$\cos \tilde{\alpha} = \frac{x_j - x_i + (u_j - u_i)/\alpha}{(l_{ij}^0 + l_{ij}^*)/\alpha}, \quad \sin \tilde{\alpha} = \frac{y_j - y_i + (-v_j + v_i)/\alpha}{(l_{ij}^0 + l_{ij}^*)/\alpha} \quad (11)$$

また、部材剛性マトリクス $[k]_{ij}$ は、式(4)より、

$$[k]_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\alpha}^2 \cos \tilde{\alpha} & -\cos \tilde{\alpha}^2 \sin \tilde{\alpha} & -\cos \tilde{\alpha}^2 \cos \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha}^2 \sin \tilde{\alpha} \\ -\sin \tilde{\alpha}^2 \cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha}^2 \sin \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha}^2 \cos \tilde{\alpha} & -\sin \tilde{\alpha}^2 \sin \tilde{\alpha} \\ -\cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} & -\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha} \\ \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} & -\sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha} & -\sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \quad (12)$$

となり、変形の影響を厳密に考慮すると、剛性マトリクスの対称性が成立しないこととわかる。

式(12)は、変形後の状態を厳密に表わす式であり、部材力の増加と変位に比較して特に小さくない限り、式(12)を繰り返し用いることにより、十分な精度で解を得ることとできると思われる。

3. SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique)

本論文では、SUMTを用いて最適解を求めている。制約条件の無い最小化問題の解法には、設計変数の比較的多い場合に有効とされている Powell の直接探索法に基づいた方法を用いている。

以下に、制約条件式、修正目的関数、制約条件の無い最小化問題について説明する。

3-1 制約条件式

許容応力、細長比等細部の規程は、道路橋示方書(昭和48年)に従っている。トラス部材の断面は、正方形箱断面とし、サノオパテミセーションにより得られた関係を利用しているが、詳細^{(2),(3)}は省略する。また、ヤールの一部使用している。

考慮している制約条件式を以下に示す。ここで、NF; 部材数、NLC; 荷重条件数、 N_a ; 許容応力、 d_a ; 許容変位(本論文では、正の方向のみ考慮している。)、NDF; 変位を拘束している自由度の数である。

(1) 応力拘束

$$\left[A_i - \frac{F_{ji}}{\sigma_{a,i}} \geq 0, (j=1 \sim NLC), (i=1 \sim NF) \right]$$

(2) 細長比拘束 細長比の上限(引張, 圧縮とも1/20としている。)より決定される断面積の下限を A_{min} とすると,

$$[A_i - A_{min} \geq 0, (i=1 \sim NF)]$$

に代し, ケーブル部材は, 細長比の制限を考慮しない。

(1), (2) をまとめて,

$$[A_i - \text{Max} \left(\left(\frac{F_{ji}}{\sigma_{a,i}}, (j=1 \sim NLC) \right), A_{min} \right) \geq 0, (i=1 \sim NF)] \quad (13)$$

(3) 変位拘束

$$[d_{a,i} - \text{Max} [d_{ij}, (j=1 \sim NLC)] \geq 0, (i=1 \sim NDF)] \quad (14)$$

3-2 修正目的関数 最適設計の目的関数は, l_i を部材長とすると,

$$f = \sum_{i=1}^{NF} l_i A_i \rightarrow \min. \quad (15)$$

となり, 式(13), (14) および (15) で形成される問題, 変換前の最適化問題である, これらを制約条件式の無い最適化問題に SUMT 変換すると, 次により修正目的関数を得ることができる。

$$M(A, r_k) = \sum_{i=1}^{NF} l_i A_i + r_k \left(\sum_{i=1}^{NF} \frac{1}{A_i - A_i^*} + \sum_{i=1}^{NDF} \frac{1}{d_{a,i} - d_i^*} \right) \rightarrow \min. \quad (16)$$

ここで,

$$A_i^* = \text{Max} \left[\left(F_{ji} / \sigma_{a,i}, (j=1 \sim NLC) \right), A_{min} \right]$$

$$d_i^* = \text{Max} [d_{ij}, (j=1 \sim NLC)]$$

式(16)において, r_k は $r_1 > r_2 > \dots > r_{k_{max}} \equiv 0$ なる関係を有する定数であり, それぞれの r_k において, $M(A, r_k)$ を最小にする A_k を求め, $r_k \rightarrow 0$ に近づくに従い A_k は逐次最適解に収束する。

3-3 制約条件の無い最小化問題 制約条件の無い最小化問題を解く方法は多種研究されている, 本論文では, Powell の直接探索法に基づく方法を用いた。

設計変数を x とし, その数を n とすると, この方法は, 2つの離れた点から $(n+1)$ 個の異なる方向に沿ってそれぞれの最小点を求め, さらに, 最後に達した2つの最小点を結ぶ方向に探索を行ない, 最小点を求めようとする方法である。アルゴリズムを示すと次のようになる。

まず最初に, n 個の独立な方向ベクトル $s_1, s_2, \dots, s_n$ を与える。本論文では, これらを座標軸に平行にとっている。

i) $j=1$ とする。

ii) $M(x^{(0)} + \lambda s_j, r_k)$ を最小にする $\lambda = \lambda_j$ を求め, 有意味な新値 $x^{(1)}$ を次のように定める。

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_j s_j$$

ここで, $j=1$ の場合は $l=n$, $j=2$ の場合は $l=1$ である。

iii) $i=1, 2, \dots, n$ について, $M(x^{(i)} + \lambda s_i, r_k)$ を最小にする $\lambda = \lambda_i$ を求め,

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \lambda_i s_i$$

とする。ここで、 $j=1$ の場合は $l=i$ $j=n$ の場合は $l=n+1-i$ である。つまり、最初は部材1から、 n 回目は部材 n から改良して行くことになる。

iv) $\phi = x^{(n+1)} - x^{(1)}$, $x = x^{(n+1)}$ とし、 $M(x + \lambda \phi, r_k)$ を最小にする $\lambda = \lambda_*$ を求め、

$$x_*^{(i)} = x + \lambda_* \phi$$

を計算する。

v) $j=n$ として、ii) からの過程を繰り返す。 $j=n$ の場合は、 $\phi = x_*^{(2)} - x_*^{(1)}$, $x = (x_*^{(2)} + x_*^{(1)})/2$ として、 $M(x + \lambda \phi, r_k)$ を最小にする $\lambda = \lambda_*$ を求め、

$$x_*^{(0)} = x + \lambda_* \phi$$

を計算し、 r_k が r_{kmax} になるまで、 $x^{(0)} = x_*^{(0)}$ として i) からの過程を繰り返す。

以上のアルゴリズムを、 n 変数の場合について示したのが図-5である。それぞれの方向ベクトルの番号に従って探索と進行して行く。

初期値 $x^{(0)}$ から n 方向の探索を行っている理由は、図-6に示すような等深線の場合、1方向のみの探索では、たとえ $x_*^{(1)}$ より先に進まないからである。上記のアルゴリズムを適用すると、 $x_*^{(2)}$ から $x_*^{(1)}$ の方向へさらに設計変数を改良することになる。

また、上記のアルゴリズムにおいて、ii)~iv)の過程をさらに繰り返すことにより、解の精度をより上げることは可能であるが、 r_{kmax} 以外の r に対応する解 $x_*^{(0)}$ は、高い精度を要求しない性質の値であり、また、 r_{kmax} においても、解が十分最適解の近傍に収束していると思われるので、必要ないと思われる。

1変数関数の最小化には、Fibonacci search を用いている。

4. 計算例

4-1 有限変形法に関する計算例 前述したように、有限変形法の計算は、前回計算された変位を、式(11)、(12)に繰り返し代入し変位を収束させるという、単純繰り返し法で行なっている。

収束の判定は、前回と今日の全節点変位の差の絶対値が 0.01 cm 以内の時収束とみなしている。

(1) 図-7. aに示す、3ヒンジ構造の頂点に鉛直方向に荷重 P の場合である。部材断面積は、 50 cm^2 である。荷重 P は、上向きおよび下向きに、 $1 \text{ t} \sim 200 \text{ t}$ まで荷重している。

頂点の垂直変位 δ と荷重 P の関係を示したのが図-7. bであるが、すでに多くの論文で述べられているように、線形解(点線)に比較して、部材力 σ の圧縮の場合は変位が大きくなり、引張の場合は小さくなる傾向を示している。荷重の向きにより剛性は異なることになる。()内の数字は、それぞれの荷重における、収束までの繰り返し回数を示している。変位の増加に従って繰り返し回数の増えてくる。

(2) 図-8に示す、支間 160 m の2ヒンジアーチ橋の場合である。部材断面積は、上下弦材が 200 cm^2 、腹材が 100 cm^2 にし、下弦材にお

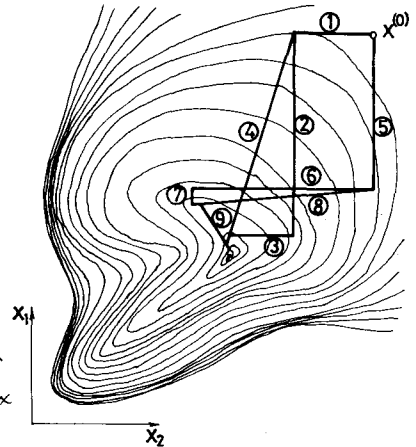


図-5

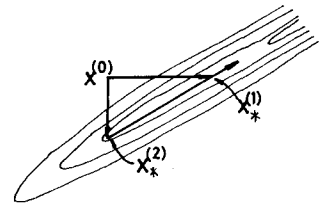


図-6

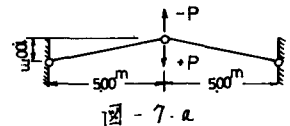


図-7. a

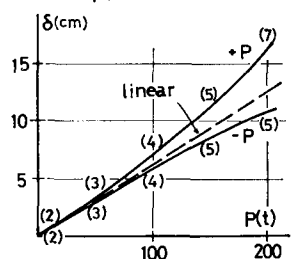


図-7. b

て、ヒンジから最初の2部材は300 cm²、次の3部材は250 cm²としている。荷重は、上弦材の全節点に80 t、交点中央にさらに40 tを載荷した。

表-7の、変位、軸力の代表的値の線形解と非線形解を比較したものである。繰り返し回数は4回であった。

(3) 図-9. aに示す、全長200 mの吊橋の場合である。部材断面積は、ケーブルが200 cm²、吊材が50 cm²、補剛トラスの上下弦材が150 cm²、腹材が100 cm²である。荷重は、補剛トラスの上弦材の全節点に100 t、さらに交点中央に30 tを載荷している。塔の剛性は無限大と考えた。

収束までの繰り返し回数は8回であった。表-8に、代表的値の線形解と非線形解の比較を示した。軸力に比べて部材断面積は不足ではあるが、10～20%の差のみである。図-9. bは、繰り返し回数と節点変位 u_A 、 v_B の関係を示したものである。

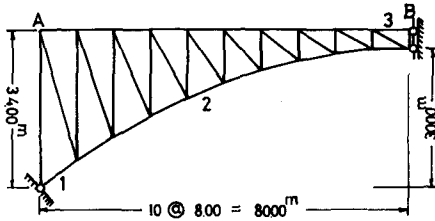


図-8

	linear	nonlinear
u_A	5.55 cm	5.78 cm
v_B	49.23	51.13
F_1	-1251 t	-1267 t
F_2	-989	-1008
F_3	-756	-789

表-8

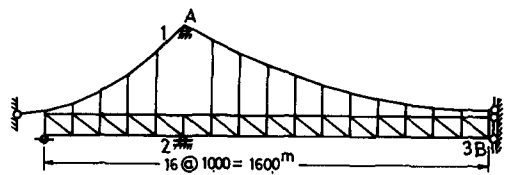


図-9. a

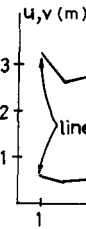


図-9. b

	linear	non-linear
u_A	59.83 cm	50.70 cm
v_B	326.18	274.34
F_1	2169 t	1971 t
F_2	-1098	-835
F_3	1047	942

表-2

4-2 有限変形を考慮した最適設計に関する計算例 前述したように、非線形計画法はSUMTを用いた。繰り返し回数の最大を $n_{max} = 5$ とし、 γ の値は次のように定めた。

$$\gamma_1 = 10000, \gamma_2 = 1000, \gamma_3 = 100, \gamma_4 = 10, \gamma_5 = 1$$

部材断面は、正方形断面、ケーブルの2種類考えた。正方形断面には任意の鋼種を考慮することからできる。ケーブルは、許容引張応力を5600 kg/cm²とし、ヤング率は 2×10^6 kg/cm²とした。

有限変形法における収束の判定条件は、4-1と同じ条件を用いている。

Fibonacci searchにおける収束の判定条件は、前回と今回の λ に対応する目的関数の比から1を引いた絶対値が0.005より小さい場合収束とみなしている。

(1) 図-10に示す、3ヒンジ構造の頂点に、 $P = 100$ tを載荷した場合である。部材1、2ともSM58である。

表-3に、部材断面積 (cm²) と総体積 (m³) を、線形解と非線形解とを比較して示した。有限変形を考慮した方が、必要断面積の大きい。()内は、それぞれの部材断面積の下限値である。

(2) (1)の問題で、さらに荷重載荷点のy方向の変位を1.5 cmに拘束した場合である。部材1、2ともSM58である。

結果を表-4に示した。 (1)と同様非線形解の方が大きい断面積に収束している。

(3) 図-11に示す、3ヒンジ構造の頂点に $P = -100$ tを載荷した場合

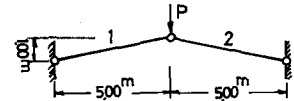


図-10

	linear	non-linear
1	125.9 (125.8)	128.6 (128.4)
2	125.9 (125.8)	128.5 (128.4)
T	0.128	0.131

表-3

合である。部材1, スともSM 58である。

計算結果を表-5に示した。 (1)とは反対に、有限変形を考慮した設計のため、必要断面積は小さく、3%程度減少している。

(4) 図-12に示すように、単純なカンティレバートラスを部材1, スで吊っている場合で、荷重は節点①, ②にそれぞれ100t載荷している。部材1, スはケーブル、部材3, 4, 5, 6はSM 58とした。

計算結果を初期値とともに表-6に示した。

有限変形を考慮しない場合は、全部材ほぼ全応力設計とみせる結果に収束しているのに反して、有限変形を考慮した場合は、ケーブル部材1, スにおいて、応力による断面積の下限值よりも、数倍大きい値に収束し、他の部材の断面積は、線形解とほとんど変わらなかった。

また、有限変形を考慮する場合に、初期値をス通り与えたため、ケーブル部材の結果に多少の差がみられる。

	linear	non-linear
1	210.9 (114.7)	215.5 (116.0)
2	210.7 (114.7)	215.4 (116.0)
T	0.215	0.220
δ	1.50 (1.50)	1.50 (1.50)

表-4

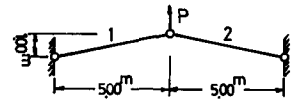


図-11

	linear	non-linear
1	98.2 (98.1)	95.4 (95.2)
2	98.4 (98.1)	95.2 (95.2)
T	0.100	0.097

表-5

	linear		non-linear			
	Init. V.	Opt.	Init. V.	Opt.	Init. V.	Opt.
1	52.5	1.3 (1.2)	52.5	3.9 (2.2)	2625	2.6 (1.6)
2	52.5	2.0 (1.7)	52.5	12.7 (3.0)	2625	9.4 (2.2)
3	100	117.8 (117.8)	100	115.9 (115.8)	100	118.0 (117.8)
4	100	122.3 (122.0)	100	122.0 (121.9)	100	122.0 (122.0)
5	100	74.7 (74.5)	100	68.9 (68.8)	100	70.9 (70.7)
6	100	191.0 (191.0)	100	191.0 (190.9)	100	191.0 (191.0)
T		0.287		0.291		0.290

表-6

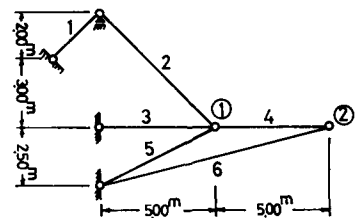


図-12

5. あとがき

変形後の状態を正確に表わす剛性マトリクスを用いて、有限変形の影響を考慮したトラス構造物の最適設計法および計算例について説明した。

最適設計において、対象とした構造物は規模であったため、①構造系に作用する荷重の向きによって、線形解と大きく異なる結果が得られた。(表-3, 4, 5), ②図-12に示した足構造において、線形解と非線形解で、ケーブル部材の断面積に大きな差がみられる等、大規模構造の最適設計を行なう上で、問題になると思われる点の指摘をした。さらに、大型構造物の実用的な最適設計のためには、何らかの部分構造分割法による最適設計、近似構造解析法等の発展が必要である。

また、本論文では、1変数関数の最小化に、Fibonacci searchを用いたため、対象とする構造物が大きければ、ス次補間法の方が能率の良いと思われる。

なお、計算は、北大大型計算機センター FACOM 230-60, 230-75を使用した。

最後に、本論文の所収に際して、室蘭工業大学尾崎副教授の御協力をおたことを付記し、謝意を表したい。

参考文献

- (1) 後藤茂大氏；“非線形有限変形法(大変形法)によるトラスの大変形解析とその応用プログラム”，土木学会論文報告集，1977, No. 194.
- (2) 杉本博之；“トラス構造物の実用的最適設計に関する研究”，土木学会論文報告集，1972, No. 208.
- (3) 杉本博之；“軸力のみを受ける部材のサブオプティミゼーションとその応用”，室工大研究報告，1974, Vol. 8, No. 2.