

曲線折板構造の立体的解析

室蘭工業大学 学生員 橋本 至

室蘭工業大学 正 奥 尾崎 鋼

1 まえがき

曲線橋では 曲率半径が 小さくなるにつれて 床板に大きなカントが付けられる。この場合、扇形状の床板は、扇形板を 傾けたものとは 異なってくる。さらに 箱桁橋で 逆台形断面を用いる場合などでは 腹板も 部分円筒シェルを 傾けたものとは、異なってくる。

本論文は コンクリート曲線床板橋 及び 曲線箱桁橋の部材を 部分円筒シェルとみなした場合の 有限曲線帯板法による解析を行い、曲線床板橋におけるカントの影響 及び 曲線箱桁橋における桁のテーパによる床板への影響などを 検討した。なお この場合、薄肉理論を 適用することの妥当性をも 検討するため、コンクリート部材の肉厚を考慮した 有限曲線角柱法による解析も あわせて行った。

2 薄肉仮定による曲線帯板法

この方法は、表現の差異があるが Scordelis¹⁾等により 発表されたものと同じになる。

変位を $\{u, v, w, \beta\}^T$ とし、その方向は Fig-2 に示す通りとする。節変力は $\{F_u, F_v, F_w, F_\beta\}^T$ とし、各々変位と対応し、その方向も 一致させる。両変変が 単純支持という条件から変位を 次の様に 橋軸方向を フーリエ級数展開する。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(s, \theta) \\ v(s, \theta) \\ w(s, \theta) \\ \beta(s, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^m(s) \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ v^m(s) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ w^m(s) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ \beta^m(s) \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u^m(s) &= \alpha_1^m + \alpha_2^m s & v^m(s) &= \alpha_3^m + \alpha_4^m s \\ w^m(s) &= \alpha_5^m + \alpha_6^m s + \alpha_7^m s^2 + \alpha_8^m s^3 \\ \beta^m(s) &= 2w^m(s)/s = \alpha_6^m + 2\alpha_7^m s + 3\alpha_8^m s^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と、面内では 一次変化を、面外では 三次変化を 仮定する
多項式で表わす。要素の節変変位を $\{\delta_e^m\} = \{u_i^m, v_i^m, w_i^m, \beta_i^m\}$
 $u_j^m, v_j^m, w_j^m, \beta_j^m\}^T$ と 表わすと

$$\{\delta_e^m\} = [A] \{\alpha^m\} \quad (3)$$

$$\{f^m\} = [n][\alpha^m] = [n][A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad (4)$$

歪みと変位の関係は²⁾

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial v}{\partial s} & \epsilon_\theta &= \frac{1}{s \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{s} + \frac{\tan \varphi}{s} w & 2\gamma_{s\theta} &= \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{s} + \frac{1}{s \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ K_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} & K_\theta &= -\frac{1}{s^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\tan \varphi}{s^2 \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

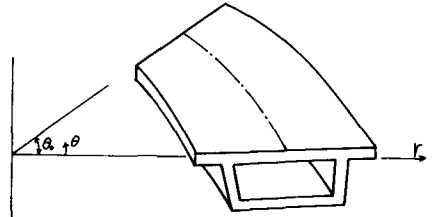


Fig 1

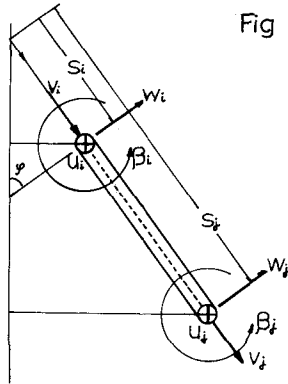


Fig 2

$$2K_{20} = -\frac{2}{S \cos \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial S^2 \partial \theta} + \frac{2 \tan \varphi}{S} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{2}{S^2 \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2 \tan \varphi}{S^2} u \quad \}$$

歪みベクトル $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_s \varepsilon_a 2K_{20} K_s K_\theta 2K_{s\theta}\}^T$ を 節変位ベクトル $\{\delta_e^m\}$ で表わすと

$$\{\varepsilon\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \{\alpha^m\} = \sum [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad \text{————— (6)}$$

断面力 (応力) と歪みの 等方性材料に対する関係は

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{E t}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_s) & N_s &= \frac{E t}{1-\nu^2} (\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta) & N_{s\theta} &= N_{\theta s} = G \cdot t \cdot 2K_{s\theta} \\ M_\theta &= \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} (K_\theta + \nu K_s) & M_s &= \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} (K_s + \nu K_\theta) & M_{s\theta} &= M_{\theta s} = \frac{G t^3}{12} \cdot 2K_{s\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{————— (7)}$$

但し E ; 弾性係数 ν ; ポアソン比 G ; せん断弾性係数 t ; 厚さ

断面力ベクトル $\{\sigma\} = \{N_s N_\theta N_{s\theta} M_s M_\theta M_{s\theta}\}^T$ を 歪みベクトルで表わし 式 (5) (6) を 代入すると

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad \text{————— (8)}$$

式 (3) (6) (8) を用いて、仮想仕事の原理を用いて 剛性マトリックスを誘導すると (ここでは フーリエ級数 m 項目の 仮想変位を $\bar{\delta}$ としている) 次の様になる。ここで計算を 容易にするため、 $[B^m] = [\bar{B}^m] \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} + [\bar{\bar{B}}^m] \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0}$ と 分ける。

$$\begin{aligned} [K^m] &= \int_V [A]^{-1T} [B^m]^T [D] [B^m] [A]^{-1} dV \\ &= \frac{\theta_0}{2} \int [A]^{-1T} \{ [\bar{B}^m]^T [D] [\bar{B}^m] + [\bar{\bar{B}}^m]^T [D] [\bar{\bar{B}}^m] \} [A]^{-1} ds \quad \text{————— (9)} \\ &\quad \left(\because \int_0^{\theta_0} \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \int_0^{\theta_0} \cos^2 \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = \frac{\theta_0}{2}, \int_0^{\theta_0} \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} d\theta = 0 \right) \end{aligned}$$

又荷重項についても 同様にフーリエ級数展開をして 仮想仕事の原理により

$$\{F^m\} = \{U^m V^m W^m M^m\}^T \cdot \frac{\theta_0}{2} \quad \text{————— (10)}$$

となる。ここで U^m, V^m, W^m, M^m に対して 等分布荷重の場合 $\frac{4g}{m\pi}$ ($m=1, 3, 5, \dots$) となり、集中荷重の場合 $\frac{2P}{\theta_0} \sin \frac{m\pi\theta_p}{\theta_0}$ ($m=1, 2, 3, \dots$) となる。但し g ; 単位長さ当りの荷重強度 θ_p ; 荷重の載る位置。最後に 今までの要素での局所座標系から 構造全体の全体座標系へ 変換しなければならない。

$$\{\delta_e^m\} = [T] \{\bar{\delta}_e^m\} \quad \text{————— (11)}$$

と、座標変換マトリックス $[T]$ を 求め、全体座標系での 剛性マトリックスを求める。

$$[\bar{K}^m] = [T]^T [K^m] [T] \quad \text{————— (12)}$$

3 肉厚を考慮した曲線角柱要素法

この理論は Zienkiewicz 等により発表された³⁾ 直線角柱要素法を、曲線角柱要素に 適用したものである。

この場合、節変の自由度を 3 とし、変位を $\{u, v, w\}^T$ とする。その方向は Fig-4 に示す通りとする。節変力は $\{F_u, F_v, F_w\}^T$ とし 各々 変位に対応し、その方向も 一致させる。両端単純支持という条件から 変位を 次の様に 橋軸方向に フーリエ級数展開する。

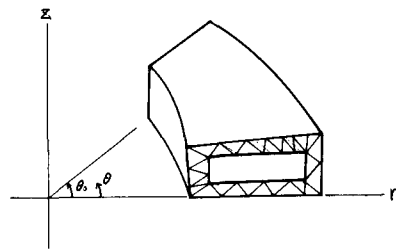


Fig 3

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^m \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ v^m \cos \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \\ w^m \sin \frac{m\pi\theta}{\theta_0} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} u^m &= \alpha_1^m + \alpha_2^m r + \alpha_3^m z \\ v^m &= \alpha_4^m + \alpha_5^m r + \alpha_6^m z \\ w^m &= \alpha_7^m + \alpha_8^m r + \alpha_9^m z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と一次変化の多項式で表わす。要素の節変位 $\{\delta_e^m\}$ を $\{u_i^m, v_i^m, w_i^m, u_j^m, v_j^m, w_j^m, u_k^m, v_k^m, w_k^m\}^T$ と表わすと

$$\{\delta_e^m\} = [A] \{\alpha^m\} \quad (15)$$

$$\{f^m\} = [n] \{\alpha^m\} = [n][A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad (16)$$

歪みと変位の関係は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とし、歪みベクトル $\{\epsilon\} = [\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{z\theta}]^T$ を 節変位ベクトルで表わすと

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] \{\alpha^m\} = \sum [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad (18)$$

応力と歪みの関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_\theta + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_z & \tau_{rz} &= \frac{E(\frac{1}{2}-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{rz} \\ \sigma_\theta &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_r + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_\theta + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_z & \tau_{r\theta} &= \frac{E(\frac{1}{2}-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{r\theta} \\ \sigma_z &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_\theta + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_z & \tau_{z\theta} &= \frac{E(\frac{1}{2}-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma_{z\theta} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

応力ベクトル $\{\sigma\} = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}]^T$ を 歪みベクトルで表わし、式 (18) を代入すると

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] \sum_{m=0}^{\infty} [B^m] [A]^{-1} \{\delta_e^m\} \quad (20)$$

式 (15) (18) (20) を用い、仮想仕事の原理により 曲線帯板法の場合と同様にして 剛性マトリックス及 荷重項について 求めると

$$[K^m] = \frac{\theta_0}{2} \iint [A]^{-1T} \{ [B^m]^T [D] [B^m] + [B^m]^T [D] [B^m] \} [A]^{-1} dr dz \quad (21)$$

$$[F^m] = \{ L^m, V^m, W^m \} \cdot \frac{\theta_0}{2} \quad (22)$$

となる。

なお 自重及表面荷重については 形状マトリックス (式 (16) 中 $[n][A]^{-1}$) を用いて 等価節応力を求めた。

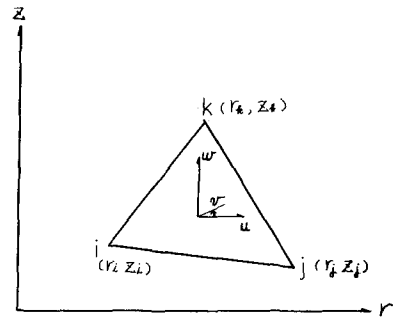


Fig 4

4 扇形平板の曲げ理論による値との比較

円錐座標系の曲線帯板の特殊な場合として Fig. 2 における経線と緯線となす角が $\varphi = 0$ の場合には、扇形帯板となる。この場合、芳村氏の扇形平板の曲げ理論による値と比較すべく、Fig. 5 のように直線の2辺が単純支持で、曲線の他の2辺が自由な扇形平板に、 q_0 なる均載等分布荷重が作用した場合を計算した。

なお、これは扇形平板の中心角が $\alpha = 30^\circ$ 、扇形平板の巾 d と中心円弧長 $\alpha \times l$ との比が 1 なる場合の比較であり、弾性係数 $300,000 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 0、厚さ 1 cm、 $l = 406.5 \text{ cm}$ 、 $d = 213 \text{ cm}$ 、 $q_0 = 2.2 \text{ kg/cm}^2$ である。

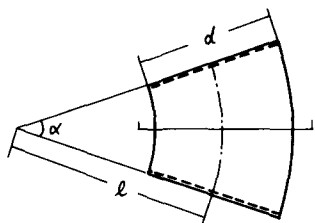


Fig 5

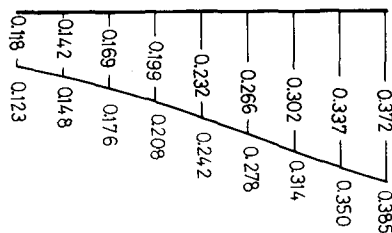


Fig 6 たわみ w ($\times 10^{-4} \text{ cm}$)

この結果 Fig. 6, 7, 8 に示すように、たわみ w 、断面方向曲げモーメント M_r 、軸方向曲げモーメント M_θ は扇形平板の曲げ理論による厳密値より 4% 弱小さな値を示した。

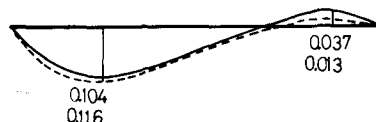


Fig 7 M_r ($\times 10^4 \text{ kg-cm}$)

5 曲線床板橋におけるカントの影響

円錐座標系の曲線帯板では、カントが付いた場合の曲線橋の幾何学的形状をより満足するような解析ができるので Fig. 9 に示すような断面および形状の床板橋を想定しカントの影響を調べた。なおカント量 ($H/\text{巾}$) の大きさは、0%、6%、12% と変化させ、自重あるいは、スパン中央に線荷重 R/m が作用した場合の値を求めた。

自重による鉛直方向たわみは Table 1 に示すようにカントの増加とともにわずかに減少するが水平方向変位は Table 2

のように、増加する様子かわかる。自重による断面方向曲げモーメント M_r は Table 3 に示すように、カントの増加とともに減少するが、外側程減少率は小さい。軸方向曲げモーメント M_θ は Table 4 のように外側が増加し、

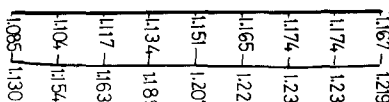


Fig 8 M_θ ($\times 10^4 \text{ kg-cm}$)

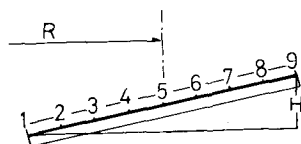


Fig 9

巾 8m、スパン 15m
 $R = 30 \text{ m}$
 $E = 300,000 \text{ kg/cm}^2$
 $\nu = 0.2$

	0%	6%	12%
1	0.690	0.688	0.682
2	0.720	0.718	0.711
3	0.757	0.754	0.747
4	0.798	0.795	0.787
5	0.844	0.841	0.832
6	0.894	0.890	0.881
7	0.948	0.944	0.934
8	1.006	1.002	0.992
9	1.070	1.066	1.054

Table 1 鉛直方向変位 (cm)

	0%	6%	12%
1	0.000	0.398	0.789
2	0.000	0.416	0.824
3	0.000	0.437	0.867
4	0.000	0.462	0.916
5	0.000	0.489	0.970
6	0.000	0.519	1.029
7	0.000	0.552	1.093
8	0.000	0.587	1.162
9	0.000	0.625	1.237

Table 2 水平方向変位 (cm)

内側が減少している様子が見られる。

しかしながら、これはほぼいづれもごくわずかである。

なお、カントがない場合のたわみと、軸方向曲げモーメントについて、肉厚を考慮した有限曲線角柱要素法による値との比較を Fig. 10, 11 に示したが、外側で多少、小さな値を示した。

又、床板橋面に垂直な線荷重をスパン中央に載荷した場合の

たわみ、水平方向変位、断面方向曲げモーメント、軸方向曲げモーメントの値を Table 5, 6, 7, 8 に示したが、自重の場合と同様、さほど大きな影響は、みられなかった。

	0%	6%	12%
1	0.404	0.404	0.401
2	0.392	0.391	0.389
3	0.382	0.382	0.381
4	0.375	0.375	0.374
5	0.370	0.370	0.370
6	0.365	0.366	0.366
7	0.362	0.362	0.362
8	0.358	0.358	0.359
9	0.353	0.351	0.343

Table 3 M_θ ($\times 10^5$ kg·cm)

	0%	6%	12%
1	0.000	0.000	0.000
2	0.139	0.138	0.137
3	0.231	0.231	0.229
4	0.292	0.292	0.290
5	0.321	0.321	0.320
6	0.315	0.314	0.314
7	0.267	0.266	0.266
8	0.174	0.174	0.173
9	0.000	0.000	0.000

Table 4 M_r ($\times 10^4$ kg·cm)

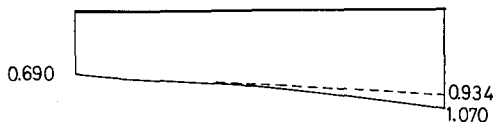


Fig. 10 たわみ (cm)

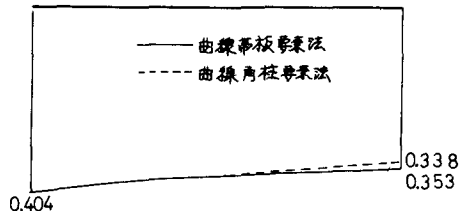


Fig. 11 M_θ ($\times 10^5$ kg·cm)

	0%	6%	12%
1	0.285	0.285	0.285
2	0.296	0.296	0.296
3	0.310	0.310	0.310
4	0.326	0.326	0.326
5	0.344	0.344	0.344
6	0.364	0.364	0.363
7	0.385	0.385	0.385
8	0.408	0.408	0.408
9	0.433	0.433	0.433

Table 5 鉛直変位 (cm)

	0%	6%	12%
1	0.000	0.168	0.336
2	0.000	0.175	0.350
3	0.000	0.183	0.367
4	0.000	0.193	0.386
5	0.000	0.203	0.407
6	0.000	0.215	0.430
7	0.000	0.228	0.456
8	0.000	0.242	0.483
9	0.000	0.259	0.514

Table 6 水平変位 (cm)

	0%	6%	12%
1	0.000	0.000	0.000
2	0.221	0.221	0.223
3	0.296	0.296	0.298
4	0.324	0.324	0.326
5	0.331	0.332	0.334
6	0.321	0.322	0.324
7	0.290	0.291	0.293
8	0.272	0.273	0.274
9	0.000	0.000	0.000

Table 7 M_r ($\times 10^4$ kg·cm)

	0%	6%	12%
1	0.204	0.204	0.205
2	0.196	0.196	0.197
3	0.192	0.192	0.193
4	0.189	0.189	0.191
5	0.187	0.188	0.189
6	0.186	0.186	0.188
7	0.185	0.185	0.187
8	0.185	0.185	0.187
9	0.183	0.182	0.180

Table 8 M_θ ($\times 10^5$ kg·cm)

6 曲線箱桁橋における腹部傾斜の影響

コンクリート箱桁橋ではしばしば、逆台形断面を採用することがある。この場合の腹部の幾何学形状は円錐座標系の曲線帯板として解析できるので、水平方向からの傾きが 60° の場合の値と 矩形断面 (90°) の場合の床板の断面方向モーメントについて 比較した。(Fig 12)

なお、半径 $R=50\text{m}$ 巾員 7m ($1.5\text{m}+4.0\text{m}+1.5\text{m}$) 桁高 1.5m スパン 25m 、上床板厚 20cm 腹部厚 25cm 下床板 15cm $E=300,000\text{kg/cm}^2$ $\nu=0.2$ 荷重は、スパン中央に桁間に 5t/m の線荷重を載荷した。

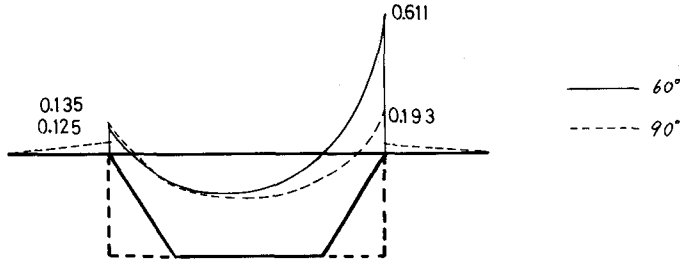


Fig 12

7 あとがき

円錐座標系での曲線帯板法を用いることにより、カント、桁にチーバーが付けられ 扇形板と部分円筒シェルの組合せでは解析できなかったものが 容易に解析できるのである。又連続曲線箱桁橋への展開も可能である。

以上 計算は 北海道大学大型計算機センター FACOM 230-75 を使用した。

8 参考文献

- 1) C. Meyer and A.C. Scordelis "Analysis of Curved Folded Plate Structure" *Journal of the Structural Division, ASCE*, Oct, 1971, pp 2459-2480
- 2) V. V. Novozhilov "The Theory of Thin Shells" P. Noordhoff, Ltd, Groningen, Netherlands.
- 3) O. C. Zienkiewicz and J. J. M. Too, "The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes" *Procs. Institution of Civil Engineers, Part 2, Sept. 1972*, pp 147-172
- 4) 芳村 仁 「曲線直交変形性扇形平板の曲げについて」 土木学会論文集 82号 昭和37年6月