

周辺支持された厚肉円筒形シェルの3次元応力解析

—— 部分荷重をうける場合 ——

北海道大学工学部 正 員 能町純雄

室蘭工業大学 正 員 松岡健一

室蘭工業大学 学生員 ○ 後藤和博

1. まえがき

本解法は、肉厚を考慮に入れた場合の周辺ヒンジ支持された円筒形シェルの、*sine* 荷重及び部分分布荷重が作用した場合の変位と応力の解析を、非軸対称3次元応力問題として取扱ひ、円柱座標に関する有限フーリエ・ハンケル変換を用いて行なったものである。薄肉シェルの解法について、*Timoshenko (Vlasov)* や *Flügge* らの変形法による解法では円筒殻の力のつりあい式から変位 u, v, w についての3元連立偏微分方程式を誘導し、 u, v, w を長手方向(母線方向)にフーリエ級数展開して変位及び各種応力を求める方法があるので、これらを比較検討の参考として計算を進めることができる。

2. 基礎方程式

座標軸を r, θ, z に選んだ円柱座標における弾性体のつりあい方程式は、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ をそれぞれ r, θ, z 方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \tau_{rz}, \tau_{zr}$ をせん断応力度とすると、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = K_r \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = K_\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = K_z \quad (3)$$

ここで K_r, K_θ, K_z は物体力の各方向成分である。また u, v, w を r, θ, z 方向の変位成分とし、 μ, λ を *Lamé* の弾性定数とすれば、弾性問題における *Hookes* の法則は次の様になる。

$$\sigma_r = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4) \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = (2\mu + \lambda) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5) \quad \tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_z = (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) \quad (6) \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (9)$$

3. 円柱座標における非軸対称3次元応力問題の解

基礎方程式の有限 *Fourier-Hankel* 変換による解法。

積分変換の核となる関数として $L_1 = X_1 \sin m\theta$, $L_2 = X_2 \cos m\theta$, $L_3 = X_3 \sin m\theta$ をそれぞれつりあい式(1)~(3)に対して選び、 θ に関して $(0, \varphi)$ の間で有限 *Fourier* 変換を行ない、 r に関して (b_2, b_1) , z に関しては $(0, c)$ 間で X_1, X_2, X_3 を核とする積分変換を行なう。この時、*Hookes* の法則を考慮して応力を変位で表わす。このようにして求められる $C_m[v]$, $S_m[u]$ に対して次の様におく。

$$S_m[u] = A_{mrz} + B_{mrz} \quad , \quad C_m[v] = A_{mrz} - B_{mrz}$$

$$S_m[\tau_{rz}] = T_{mrz}^A + T_{mrz}^B \quad , \quad C_m[\tau_{\theta z}] = T_{mrz}^A - T_{mrz}^B$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad S_m[f] &= \int_0^\varphi f \cdot \sin m\theta \, d\theta \quad , \quad C_m[f] = \int_0^\varphi f \cdot \cos m\theta \, d\theta \\ &\quad \left(m = \frac{M\pi}{\varphi}, M = 0, 1, 2, \dots \right) \end{aligned}$$

式(1)~(3)を積分変換して得られた式に、前述の関係を導入し、校 X_1, X_2, X_3 を次のようにおいて

$$X_1 = r H_{\mu}(\xi r) \cos N\zeta, \quad X_2 = r H_{\mu}(\xi r) \cos N\zeta, \quad X_3 = r H_{\nu}(\xi r) \sin N\zeta \quad (N = \frac{\pi\pi}{C}, \pi = 0, 1, 2, \dots)$$

r, ζ に関する有限 Fourier-Hankel 変換を行ない、最終的に3元連立方程式から3つの変位成分の有限 Fourier-Hankel 変換値 $H_{\mu}G_n[A_{mn}], H_{\mu}G_n[B_{mn}], H_{\nu}G_n[W_{mn}]$ を求める。これら3つの変換値を逆変換することにより基礎方程式(1)~(3)の解を変位の形で求めることができる。周辺ヒンゲ支持され、表面にせん断力のない場合の変位の式は次の式で表わされる。

4. 変位の一般式

半径方向変位 u 、円周方向変位 v 、および軸方向変位 w は

$$u = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n (A_{mnr} + B_{mnr}) \sin N\zeta \sin M\theta \quad (10)$$

$$v = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n (B_{mnr} - A_{mnr}) \sin N\zeta \cos M\theta \quad (11)$$

$$w = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n W_{mnr} \cos N\zeta \sin M\theta \quad (12)$$

$$A_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ \chi_{mp}^{(k)} - \frac{1}{2} \omega_{mp} \right\} \beta_{mnk} + \frac{1}{N} \chi_{mp}^{(k)} \left\{ \frac{3(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{2\lambda N} \left\{ \chi_{mp}^{(k)} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \omega_{mp} \right\} C_{mnk} \quad (13)$$

$$B_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ \chi_{ms}^{(k)} - \frac{1}{2} \omega_{ms} \right\} \beta_{mnk} - \frac{1}{N} \chi_{ms}^{(k)} \left\{ \frac{(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{3(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{2\lambda N} \left\{ \chi_{ms}^{(k)} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \omega_{ms} \right\} C_{mnk} \quad (14)$$

$$W_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda N} \left\{ G_m^{(k)} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu} F_m^{(k)} \right\} \beta_{mnk} - \frac{1}{N} G_m^{(k)} \left\{ (M+1) A_{mnk} - (M-1) B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{\lambda N} \left\{ G_m^{(k)} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} F_m^{(k)} \right\} C_{mnk} \quad (15)$$

$$\frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ -\frac{(M+1)}{r} \chi_{mp}^{(k)} + \frac{(M+1)}{2r} \omega_{mp} - \frac{N}{2} F_m^{(k)} \right\} \beta_{mnk} + \left\{ G_m^{(k)} - \frac{(M-1)}{Nr} \chi_{mp}^{(k)} \right\} \left\{ \frac{3(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{2\lambda N} \left\{ -\frac{\lambda N}{2\mu + \lambda} G_m^{(k)} - \frac{(M+1)}{r} \chi_{mp}^{(k)} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (N F_m^{(k)} - \frac{(M+1)}{r} \omega_{mp}) \right\} C_{mnk} \quad (16)$$

$$\frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ -\frac{(M-1)}{r} \chi_{ms}^{(k)} - \frac{(M+1)}{2r} \omega_{ms} - \frac{N}{2} F_m^{(k)} \right\} \beta_{mnk} + \left\{ G_m^{(k)} + \frac{(M-1)}{Nr} \chi_{ms}^{(k)} \right\} \left\{ \frac{(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{3(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{2\lambda N} \left\{ -\frac{\lambda N}{2\mu + \lambda} G_m^{(k)} + \frac{(M-1)}{r} \chi_{ms}^{(k)} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (N F_m^{(k)} + \frac{(M-1)}{r} \omega_{ms}) \right\} C_{mnk} \quad (17)$$

$$\frac{\partial W_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda N} \left\{ N \chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} G_m^{(k)} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu} (N \omega_{mp} + \frac{M}{r} F_m^{(k)}) \right\} \beta_{mnk} - \left(\chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{Nr} G_m^{(k)} \right) \left\{ (M+1) A_{mnk} - (M-1) B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu + \lambda}{\lambda N} \left\{ N \chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} G_m^{(k)} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (N \omega_{mp} + \frac{M}{r} F_m^{(k)}) \right\} C_{mnk} \quad (18)$$

上式中、 C はツェルの長さ、 $N = \frac{\pi\pi}{C}$ ($\pi = 1, 2, \dots$), $M = \frac{m\pi}{\phi}$ ($m = 1, \dots$) である。ツェルの外径を b_1 、内径を b_2 とすれば(13)~(18)式中の関数は

$$\chi_{mp}^{(k)} = \frac{R_{m+1,m}(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad \chi_{ms}^{(k)} = \frac{R_{m-1,m}(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad G_m^{(k)} = \frac{R_m(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad R_{\pm 1}^{(k)}(Nr) = I_k(Nr) K_{\mp 1}(Nb_{\pm 1}) - (-1)^{\pm 1} I_{\mp 1}(Nb_{\pm 1}) K_k(Nr)$$

ただし $I_k(Nr), K_k(Nr)$ は変形 Bessel 関数。

$$F_m^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \{r R_{m+1,m}(Nr) - b_{k+1} R_{m+1}(Nr)\} - R_m(Nr) \{b_k R_{m+1,m}(Nb_2) - b_{k+1} R_{m+1,m+1}(Nb_2)\} \right]$$

$$\omega_{mp}^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \{r R_m(Nr) - b_{k-1} R_{m+1}(Nr)\} - R_{m+1,m}(Nr) \{b_k R_{m+1,m}(Nb_2) - b_{k+1} R_{m+1,m+1}(Nb_2)\} \right]$$

$$\omega_{ms}^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \{r R_m(Nr) - b_{k-1} R_{m+1}(Nr)\} - R_{m+1,m}(Nr) \{b_k R_{m+1,m}(Nb_2) - b_{k+1} R_{m+1,m+1}(Nb_2)\} \right]$$

$\beta_{mnk}, A_{mnk}, B_{mnk}, C_{mnk}$ は境界の物理量で与えられる積分定数であり、境界条件を満足する様に決定される。

5. 応力成分の一般式

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu \left(\frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} + \frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} \right) \right\} \sin N\zeta \sin M\theta \quad (19)$$

$$\overline{\sigma}_r = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu \left\{ (1-M) \frac{A_{mnr}}{r} + (1+M) \frac{B_{mnr}}{r} \right\} \right\} \sin nZ \sin m\alpha \quad (20)$$

$$\overline{\sigma}_z = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu N W_{mnr} \right\} \sin nZ \sin m\alpha \quad (21)$$

$$\overline{\tau}_{\theta z} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ N(B_{mnr} - A_{mnr}) + \frac{M}{r} W_{mnr} \right\} \cos nZ \cos m\alpha \quad (22)$$

$$\overline{\tau}_{rz} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ N(A_{mnr} + B_{mnr}) + \frac{\partial W_{mnr}}{\partial r} \right\} \cos nZ \sin m\alpha \quad (23)$$

$$\overline{\tau}_{ra} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ (1+M) \frac{A_{mnr}}{r} - (1-M) \frac{B_{mnr}}{r} + \left(\frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} - \frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} \right) \right\} \sin nZ \cos m\alpha \quad (24)$$

$$\text{E.E.} \quad \Delta = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda} G_{km}^{(k)} B_{mnk} - \frac{2\mu}{\lambda} G_{km}^{(k)} C_{mnk} \right\} \quad (25)$$

6. 境界条件

(10)~(12) 式および (19)~(25) 式は、すでに $Z=0$ および $Z=C$, $\theta=0$ および $\theta=\varphi$ における条件を満足しているので、ここでは $r=b_1$ および $r=b_2$ における境界条件のみを考慮すればよい。従って、ツェルの表面においては $r=b_k$ ($k=1, 2$) で

$$\overline{\tau}_{rz} = 0 \quad (26)$$

$$\overline{\tau}_{rz} = 0 \quad (27)$$

$$\overline{\sigma}_r = P_k(\theta, Z) \quad (28)$$

$P_k(\theta, Z)$ は円筒表面に作用する外力であるが式 (26) はすでに満足しており、式 (28) から

$$B_{mnk} = \int_0^{2\pi} \int_0^C P_k(\theta, Z) \cos m\alpha \cos nZ \, d\alpha \, dZ \quad (29)$$

また、式の誘導過程から

$$A_{mnr}|_{r=b_k} = b_k A_{mnk} \quad (30), \quad B_{mnr}|_{r=b_k} = b_k B_{mnk} \quad (31)$$

従って、式 (27) および式 (30), (31) から積分定数 A_{mnk} , B_{mnk} , C_{mnk} を決定する。

7. 数値計算例

解析の対象と

して、 $\nu=0.15$

$\mu=0.4347826E$

$\lambda=0.0931677E$

内径を1.0と

して厚さ a が

0.01, 0.05,

0.1, 0.2,

0.5 の5種類、

ツェルの長さ

C も $\pi/4$, $\pi/2$,

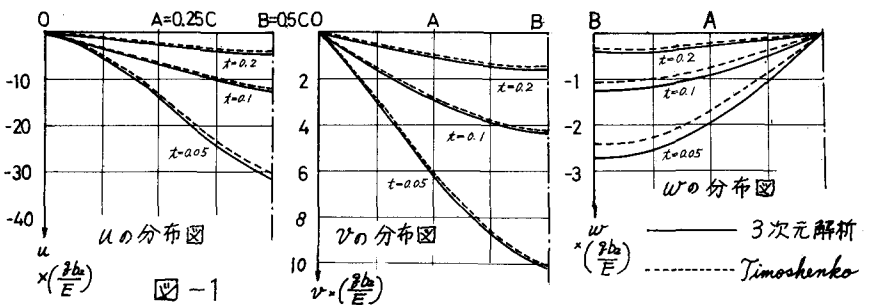
π の場合の計

算を行なった。

作用させた外力は円筒面の両面に、 θ 方向に $\sin$ 分布、 Z 方向に部分分布で円筒中心に向う力である。

t		u			v			w		
		3-dimen	Timosh	Flügg	3-dimen	Timosh	Flügg	3-dimen	Timosh	Flügg
0.01	A	-61.65	0.95	0.95	32.64	0.96	0.96	-10.61	0.87	0.87
	B	-194.2	0.95	0.95	54.62	0.97	0.97	-14.61	0.89	0.89
0.05	A	-13.36	0.95	0.95	6.371	0.97	0.97	-1.98	0.87	0.87
	B	-31.99	0.94	0.94	10.11	0.96	0.97	-2.76	0.89	0.89
0.10	A	-6.86	0.95	0.96	2.91	0.96	0.97	-0.86	0.88	0.87
	B	-13.12	0.93	0.94	4.40	0.96	0.97	-1.22	0.88	0.87
0.20	A	-2.76	0.94	0.97	1.08	0.95	0.98	-0.298	0.88	0.87
	B	-4.62	0.90	0.93	1.58	0.95	0.97	-0.426	0.93	0.88
0.50	A	-0.53	0.80	0.83	0.1926	0.83	0.88	-0.055	0.69	0.55
	B	-0.86	0.74	0.77	0.2818	0.82	0.87	-0.0608	0.88	0.76

表-1 3次元解析, Timoshenko, Flügg理論による変位の比較, $C=\frac{\pi}{2}$, $a=\frac{1}{10}C$
(Timoshenko, Flügg の値は3次元解析値の比で表わす)



t	r	σ_z		
		3-dimen	Timosh	Flügge
0.05	b ₁	-2.212	0.78	0.78
	b ₂	1.821	0.74	0.75
0.10	b ₁	-1.193	0.58	0.58
	b ₂	1.030	0.54	0.55
0.20	b ₁	-0.761	0.33	0.34
	b ₂	0.715	0.31	0.31
0.50	b ₁	-0.478	0.09	0.10
	b ₂	0.556	0.08	0.08

t	r	σ_θ		
		3-dimen	Timosh	Flügge
0.05	b ₁	-12.34	0.99	0.98
	b ₂	-0.6023	0.91	0.94
0.10	b ₁	-0.5236	0.88	0.86
	b ₂	-0.1141	1.15	1.25
0.20	b ₁	-0.2302	0.59	0.57
	b ₂	0.0464	0.09	0.161
0.50	b ₁	-0.1161	0.15	0.13
	b ₂	0.0756	0.08	0.08

表-2. 3次元解析, Timoshenko理論
Flügge理論による応力の比較.

(Timoshenko理論, Flügge理論の値は
3次元解析値との比で表わす)
ただし, $C=0.7853$, $C_0=0.007853$

表-1 および図-1 に各変位成分につ
いて3次元解析の値と Timoshenko理論,
Flügge理論値との比較を示した。3次元
解析値は断面の中央の値である。すべて
の変位とも Timoshenko理論と Flügge
理論はほとんど一致しており、厚さの薄
い場合では3次元解析値とも近い。が、
厚くなると多少差が出てくる。この計
算例では、厚さが 0.2 位まではあ
まり差はない。特に u , v は差が小さい
である。Timoshenko理論, Flügge理論

の比較では若干ではあるが、 u , v については Flügge理論が、 w については Timoshenko理論が3次元解
析値に近いようである。表-2 および図-2 ~ 図-7 には、 z 方向のスパン C , 載荷 C_0 , 肉厚 t を変えた場合
の σ_z , σ_θ の載荷中心における値の最大、最小および r 方向の分布を示した。

σ_θ については、 C が $\pi/4$ の場合 (表-2) で、厚さが 0.05, 0.10 の場合までは3次元解析値と Timoshenko
理論値, Flügge理論値はほぼ近いのであるが、厚さが 0.2, 0.5 と増すに従って3次元解析による円筒両表
面の応力値は S 字カーブを描いて大きくなるので、両表面における3次元解析値と Timoshenko理論値, Flüg
ge理論値との間には大きな差が出てくる。しかし、断面の中心近くの応力についてはほとんど一致した値を

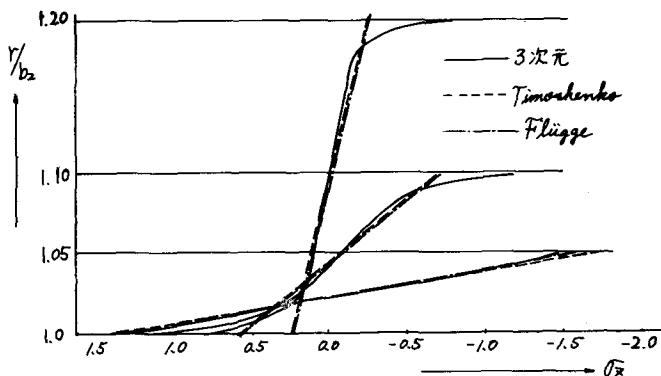


図-2 σ_z の分布図 $C=0.7853$ $C_0=0.007853$

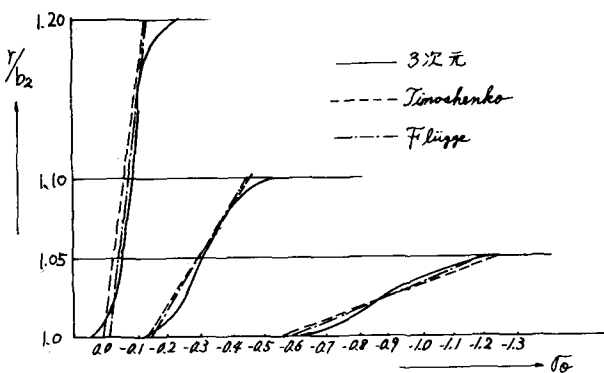


図-3 σ_θ の分布図 $C=0.7853$ $C_0=0.007853$

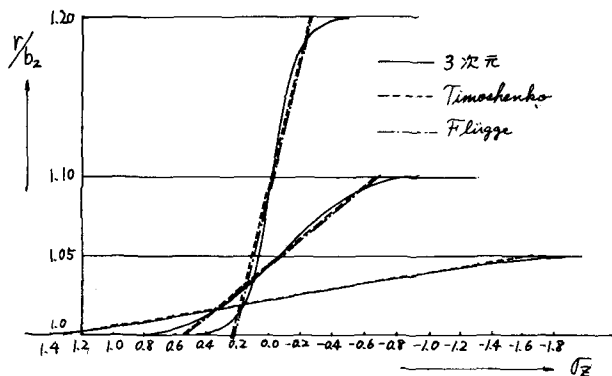


図-4 σ_z の分布図 $C=0.7853$ $C_0=0.0157$

示している。 $\bar{r}$ は $\bar{r}_0$ に比べて3次元解析値のS字カーブが著しいので、Timoshenko理論値、Flügge理論値と比較した値は、両理論値とも厚さが0.2の場合で3次元解析値と比較して約0.3、厚さが0.5となると0.08~0.1の割合に相違が大きくなっている。

このように差が大きいのは、応力の絶対値が小さいためでもある。しかし、スパンCが3.14/5のように長くなってくると、薄肉シェルの挙動を示すようになるので応力値は、厚さが0.2、0.5の場合でもTimoshenko理論、Flügge理論の両理論値とも3次元解析値に近い値を示すようになる。また、荷重載荷中が大きくなるにつれて、3次元解析値も直線性が保たれるようになる。応力の場合もTimoshenko理論、Flügge理論はほぼ近い値を与えるが、全体としてFlügge理論の方がTimoshenko理論に比べて3次元解析値に近いようである。

※参考文献

- 1) Sumio. G. Nomachi; On One Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms. Mem of Muroran Institute of Tech. vol 3, No 3, No 4 (1960, 1961)
- 2) 能町純雄, 松岡健一; 円筒座標に関する非軸対称3次元応力解析について. 第27回全国大会 (1972)
- 3) 松岡健一, 能町純雄; 無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するときの3次元応力解析. 土木学会論文報告集第229号 (1974)
- 4) K. G. Matsuoka, S. G. Nomachi; On a 3-dimensional Stress Analysis of an annular Cylindrical Body By Means of Fourier-Hankel Transforms. Proceeding of the 22nd Japan National Congress for Applied Mechanics (1972)
- 5) S. G. Nomachi, K. G. Matsuoka; On a 3-dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body Subjected by Non axisymmetrical Loading. Mem of the Muroran Institute of Tech. vol 8, No 1 (1973)
- 6) 能町純雄, 松岡健一; 無限体中の円孔に円形荷重が作用するときの3次元応力解析. 土木学会北海道支部論文報告集 (1974) ※308
- 7) Timoshenko; Theory of Plates and Shells. Theory of Elastic Stability. McGraw-hill
- 8) Flügge; Stresses in Shell By Wilhelm Flügge. Springer-Verlag (1960)
- 9) 坪井善勝; 曲面構造、シェルの理論とその応用 丸善 (1965)

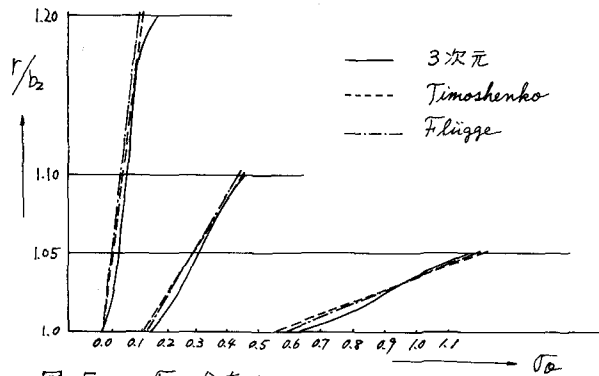


図-5 $\bar{r}_0$ の分布図 $C=0.7863$ $G=0.0157$

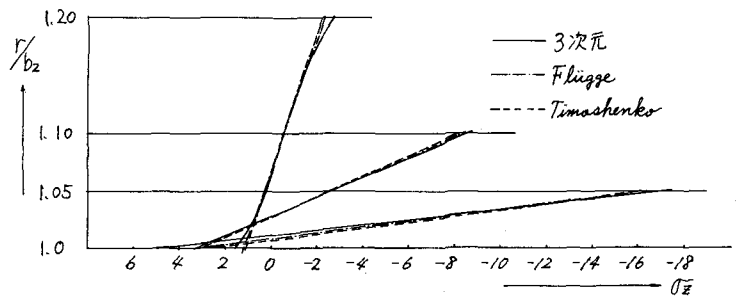


図-6 $\bar{r}_0$ の分布図 $C=1.5708$ $G=0.157$

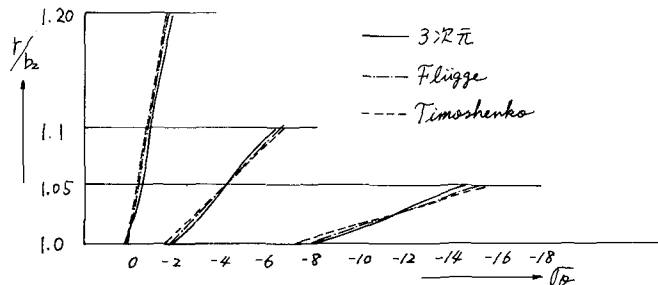


図-7 $\bar{r}_0$ の分布図 $C=1.5708$ $G=0.157$