

送桌法による台形板の解析について

北海道大学工学部 正員 茅 村 仁
日本鋼管 正員 神 信 昭

1. まえがき

曲げをうける平板の解析は境界条件、荷重条件などにより厳密解をうることが困難なことが多い。工学上の問題として種々の形状、条件を有する板構造を解析する必要も多く、電算機による種々の解法も進められている。本報告では道路橋梁版などに現われる台形板、平行四辺形板などの平板を送桌法により解析を行ないその精度についての検討と台形板の応力性状について述べたものである。

2. 送桌法 この方法は平板の方程式も満足する一般解を極座標で表わし、その有限項で近似し、周辺上の有限個の点で周辺上の条件を満足させる方法である。この方法による解析については従来から種々行われ、著者も円孔周辺に荷重を担う三辺固定一辺自由な矩形および扇形板の解析を行なった。ここでは円形部分載荷による周辺が支持された平行四辺形板、台形板などを扱いその特性を検討した。

3. 基本式 原典も円形荷重の中心にとり極座標表示の平板の基礎微分方程式 $\Delta \Delta w = \frac{p}{D}$ (ここに w = たわみ, p = 荷重, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E = 弾性係数, h = 板厚, ν = ポアソン比) の解から有孔板のたわみの式と裁断分布荷重の場合の解式を求め、 $r = r_0$ (r_0 = 荷重の半径) で連続条件を入れて解くと円形荷重が作用した平板の非載荷部分のたわみの式は次のようになる。

$$w = \frac{q_0}{64D} (8r_0^2 r^2 \ln \frac{r}{r_0} + 4r_0^4 \ln \frac{r}{r_0} + 5r_0^4 - 4r_0^4 - 4r_0^2 r^2) +$$

$$+ a_0 + c_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + c_n r^{n+2}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (e_n r^n + g_n r^{n+2}) \sin n\theta \quad (1)$$

ここに q_0 = 荷重強度, D = 板の曲げ剛性

次に図-1のように、板の境界における法線方向と接線方向の断面力を求める
と次のようである。

$$-\frac{M_m}{D} = \frac{q_0 r^2}{16D} \{ 2(1+\nu)(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1) + (1+\nu)(2 - r_0^2 r^{-2}) \cos 2\phi \} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-\nu)n(n-1)a_n r^{n-2} \cos(n\theta + 2\phi) + \right.$$

$$\left. + (n+1)\{ (1-\nu)n \cos(n\theta + 2\phi) + 2(1+\nu) \cos n\theta \} c_n r^n \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-\nu)n(n-1)e_n r^{n-2} \sin(n\theta + 2\phi) + (n+1)\{ (1-\nu)n \sin(n\theta + 2\phi) + 2(1+\nu) \sin n\theta \} g_n r^n \right] \quad (2)$$

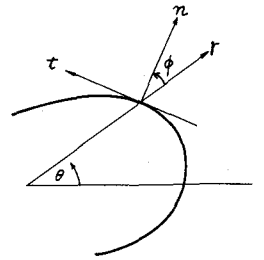


図-1

$$-\frac{M_t}{D} = \frac{q_0 r^2}{16D} \{ 2(1+\nu)(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1) - (1-\nu)(2 - r_0^2 r^{-2}) \cos 2\phi \} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-\nu)n(n-1)a_n r^{n-2} \cos(n\theta + 2\phi) + (n+1)\{ (1-\nu)n \cos(n\theta + 2\phi) - 2(1+\nu) \cos n\theta \} c_n r^n \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-\nu)n(n-1)e_n r^{n-2} \sin(n\theta + 2\phi) + (n+1)\{ (1-\nu)n \sin(n\theta + 2\phi) - 2(1+\nu) \sin n\theta \} g_n r^n \right] \right] \quad (3)$$

$$-\frac{M_{\theta t}}{D} = -\frac{q_0 r_0^2}{16D} (1-\nu)(2-r_0^2 r^{-2}) \sin 2\phi - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1-\nu) n(n-1) a_n r^{n-2} + (1-\nu) n(n+1) c_n r^n \right\} \sin(n\theta+2\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1-\nu) n(n-1) e_n r^{n-2} + (1-\nu) n(n+1) g_n r^n \right\} \cos(n\theta+2\phi) \quad (4)$$

$$-\frac{V_{\theta}}{D} = \frac{q_0 r_0^2}{8D} \left\{ (1-\nu)(1-r_0^2 r^{-2}) \cos 3\phi + (5-\nu) \cos \phi \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1-\nu) n(n-1)(n-2) a_n r^{n-3} \cos(n\theta+3\phi) + (n+1) n c_n r^{n-1} \left\{ (1-\nu)(n-1) \cos(n\theta+3\phi) - (5-\nu) \cos(n\theta+\phi) \right\} \right\} \quad (5)$$

$$-\frac{V_r}{D} = -\frac{q_0 r_0^2}{8D} \left\{ (1-\nu)(1+r_0^2 r^{-2}) \sin 3\phi + (5-\nu) \sin \phi \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1-\nu) n(n-1)(n-2) a_n r^{n-3} \sin(n\theta+3\phi) + (n+1) n c_n r^{n-1} \left\{ (1-\nu)(n-1) \sin(n\theta+3\phi) + (5-\nu) \sin(n\theta+\phi) \right\} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1-\nu) n(n-1)(n-2) e_n r^{n-3} \cos(n\theta+3\phi) + (n+1) n c_n r^{n-1} \left\{ (1-\nu)(n-1) \cos(n\theta+3\phi) + (5-\nu) \cos(n\theta+\phi) \right\} \right\} \quad (6)$$

また、たわみ角の式は次のようになる。

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{q_0 r_0^2}{16D} (4r \ln \frac{r}{r_0} + r_0^2 r^{-1}) \cos \phi + \sum_{n=0}^{\infty} \left[n a_n r^{n-1} \cos(n\theta+\phi) + c_n r^{n+1} \left\{ (n+1) \cos(n\theta+\phi) + \cos(n\theta-\phi) \right\} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n e_n r^{n-1} \sin(n\theta+\phi) + g_n r^{n+1} \left\{ (n+1) \sin(n\theta+\phi) + \sin(n\theta-\phi) \right\} \right] \quad (7)$$

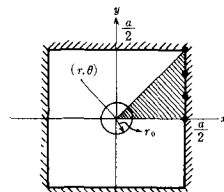
4. 正方形板

全周固定の正方形板で荷重中心と板中央が一致した場合のたわみおよび曲げモーメントについて級数解と比較したものである。

(表-1)

5. U1形板

図-2は全周単純支持のU1形板で $\theta = 40^\circ$ のときのたわみおよび断面力を $r_0 = \frac{a}{20}$ について求めた結果である。図-3は $\theta = 30^\circ$ の全周固定板のたわみおよび



正方形板
全周固定

ポアソン比 0.3

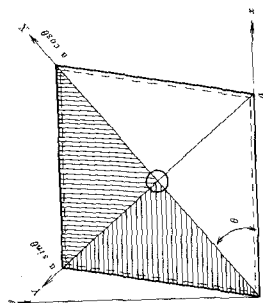
表-1

境界条件を 満す点の数	$\frac{w}{D} \text{ at } (0,0)$			$-\frac{M_x}{q_0 a^2} \text{ at } (\frac{a}{2}, 0)$		
	$r_0=0.05a$	$r_0=0.01a$	$r_0=0.005a$	$r_0=0.05a$	$r_0=0.01a$	$r_0=0.005a$
3	0.4087	0.1680	0.4205	0.1904	0.1284	0.3773
4	0.4329	0.1778	0.4449	0.1926	0.1293	0.3795
5	0.4287	0.1761	0.4406	0.1918	0.1290	0.3787
6	0.4286	0.1760	0.4406	0.1918	0.1290	0.3787
7	0.4286	0.1760	0.4406	0.1919	0.1290	0.3787
$P = \pi r_0^2 q_0 \times P a^2 / D$	0.5457	0.5603	0.5609	0.1252	0.1258	0.1258
級数解との 差	0.77%	0.00%	0.18%	0.40%	0.08%	0.08%

断面力を示したものである。いずれも収束は8~9項で十分良好な結果が得られている。

6. 台形板 図-4は台形板に均布荷重が作用したときのA-A', B-B'上の曲げモーメントを θ の変化に対して示したものであり、 $\theta = 0^\circ$ に比較して $\theta = 20^\circ$ ではx方向最大曲げモーメントは29%、y方向最大曲げモーメントは16%減少している。図-5は全周単純支持の台形板に円形荷重が $(x, y) = (a/4, a/4)$ に作用したときの表①~表⑤のたわみの収束状態を示す図である。比較的収束の悪い位置であるが25項~33項で良い結果が得られている。また曲げモーメントの収束はたわみよりは遅い部分もあるが、33項から良く収束している。

$V = 0.3$
 $r_0 = 0.05a$
 載荷位置 $(X, Y) = (0, 0)$
 $\theta = 40^\circ$
 全辺単純支持



Coordinate Systems

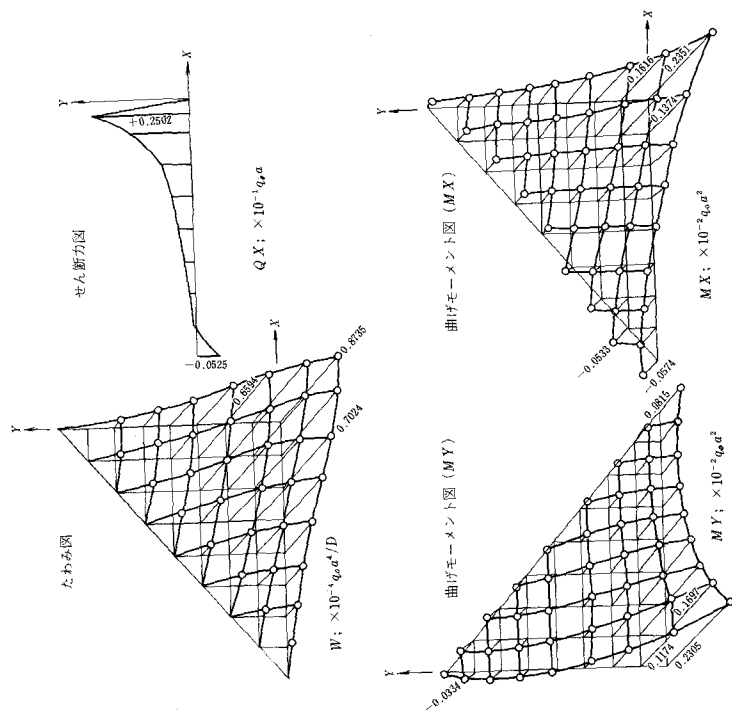
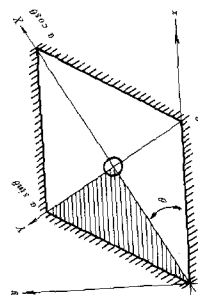
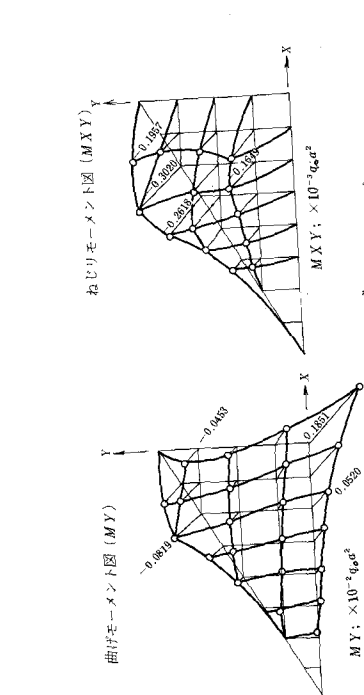
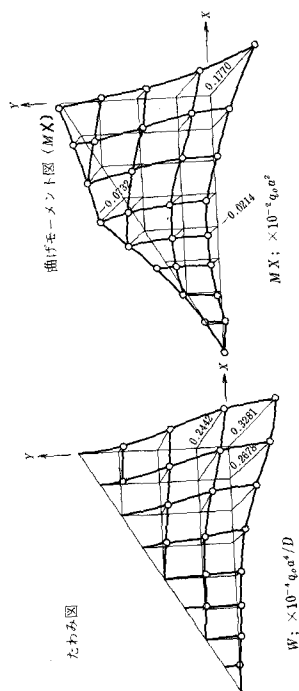


図 - 2



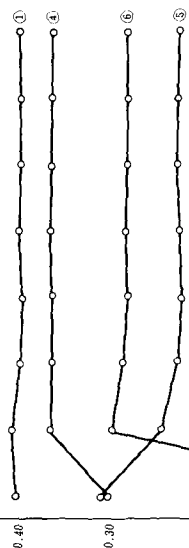
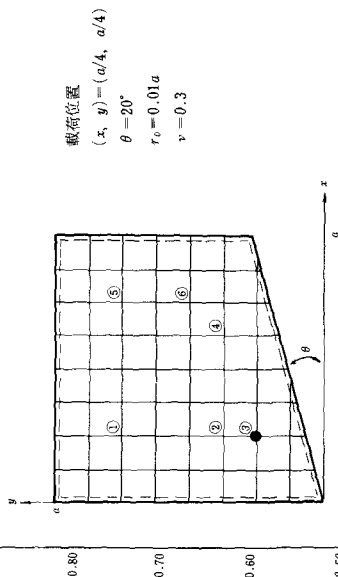
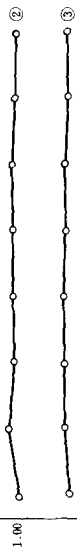
Coordinate Systems

$\theta = 30^\circ$ 全辺固定
 載荷位置 $(X, Y) = (0, 0)$

図 - 3

台形板

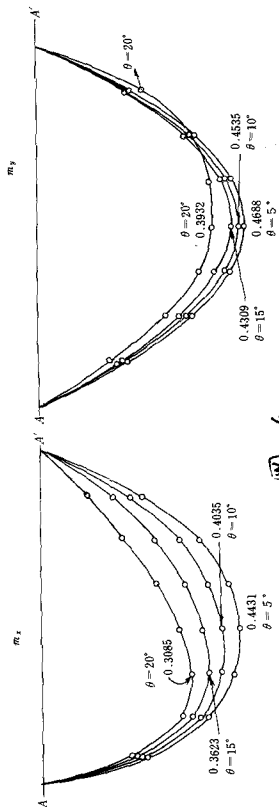
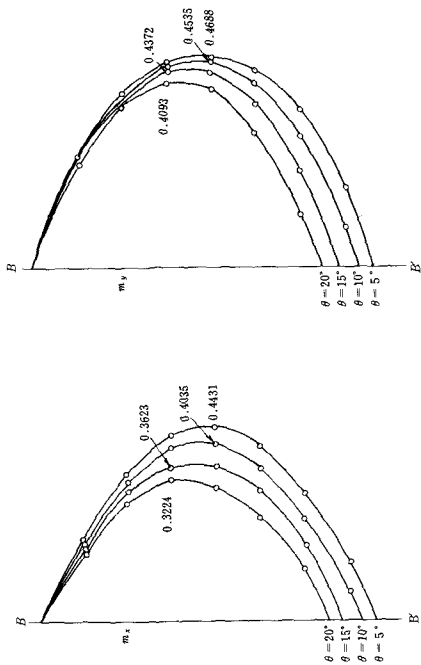
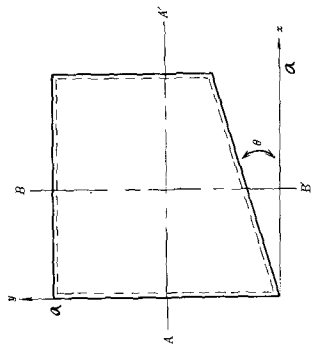
円形部分荷重のたわみ($WD/q_0 a^4 \times 10^{-6}$)の解の収束



境界条件を満す点の数

12-5

満載荷重
 ポアソン比 $\nu = 0.3$
 乗数 $q_0 a^4 10^{-1}$



12-4