

折板と要素とした弾性基礎工板の曲げについて

北海道大学

正員

能町 純雄

学生員

○岸 徳光

1. まえがき

近年、地下鉄、地下道、沈埋トンネル等と、大型の工中海中構造物の建設が多くなってきている。これらの構造物の慣用的解析方法は、軸方向には弾性基礎上の梁とし、断面方向には弾性基礎上のラーメン構造として行なわれている。従って立体的な応力性状の局所的な変化をつかむことができない。これらと詳しく検討するために構造物を折板要素に分割して解析する方法があるが、このためには、弾性基礎にある板要素の性状を先ず明らかにする必要がある。

本論文は、この目的のための1つの approach として、折板と要素とした弾性基礎工板の曲げについて

1、等断面の弾性基礎工板の要素から得られる方法と 2、平板要素から得られる弾性基礎工板モデルによる方法を示し、後者の簡略な方法でも十分の精度が得られることを示したものである。

解析にあたり、板要素は等方等厚であり、軸方向端は単純支持されているものとする。

2. 弾性基礎工板要素から得られる解式

右図のような任意の弾性基礎上の折板要素をとりだし、地盤反力を K とすると、基礎微分方程式は

$$\Delta^2 W + \frac{K}{N} W = \frac{q}{N} \quad N = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1)$$

ここで、 $0 < y < b$ の範囲に荷重が無いとし、また $b \ll l$ と仮定して (1) に指数型フーリエ変換 $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_m e^{-imx} dm$ を適用して解くと、

$$W_m m^4 - 2m^2 \frac{d^2 W_m}{dy^2} + \frac{d^4 W_m}{dy^4} + \frac{K}{N} W_m = 0 \quad (2)$$

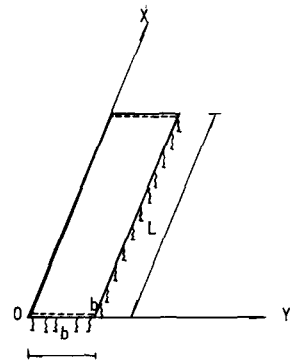


Fig. 1

さらに、 y 方向にフーリエ Sine 変換、 $S_n[W_m] = \int_0^b W_m \sin \frac{n\pi y}{b} dy$ を施し、 $-N \frac{d^2 W_m}{dy^2} = M_{m0}^*$ と整理すると

$$S_n[W_m] = - \frac{1}{\left\{ m^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{K}{N}} \left[\frac{1}{N} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ M_{mb}^* (-1)^n - M_{m0}^* \right\} + \left\{ 2m^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \right\} \left\{ W_{mb} (-1)^n - W_{m0} \right\} \right] \quad (3)$$

(3) において、 M_{m0}^* に関する係数は、分母の項を Taylor 展開して高次の項を無視できるとすれば

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\left\{ m^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{K}{N}} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right) \approx \frac{1}{\left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \frac{K}{N} \right\} N} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right) \quad (4)$$

また W_m に関しては

$$\frac{2m^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ m^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{K}{N}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + m^2 + i\sqrt{\frac{K}{N}}} + \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + m^2 - i\sqrt{\frac{K}{N}}} \right\} + \frac{m^2}{\left\{ m^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{K}{N}} \approx \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \frac{K}{N}} \quad (5)$$

結局 (3) は

$$S_n[W_m] = - \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)}{\left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \frac{K}{N} \right\} N} \left\{ M_{mb}^* (-1)^n - M_{m0}^* \right\} - \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3}{\left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \frac{K}{N} \right\}} \left\{ W_{mb} (-1)^n - W_{m0} \right\} \quad (6)$$

(6) を y 方向にフーリエ Sine 変換、 x 方向には指数型変換の逆変換を施すとたわみ w は

$$\omega = \frac{b^2}{2N} P(\eta) M_o^* + \frac{b^2}{2N} P(1-\eta) M_b^* + Q(1-\eta) \omega_b + Q(\eta) \omega_o \quad (7)$$

$$\text{但し } \eta = y/b, \quad c^4 = Kb^4/4N$$

$$P(\eta) = \frac{1}{c^2} \frac{\text{sh}c(2-\eta) \text{sin}c\eta - \text{sh}c\eta \text{sin}c(2-\eta)}{\text{ch}2c - \text{cos}2c} \quad Q(\eta) = \frac{\text{ch}c(2-\eta) \text{cos}c\eta - \text{ch}c\eta \text{cos}c(2-\eta)}{\text{ch}2c - \text{cos}2c}$$

θ_o, θ_b は $(\frac{d\omega}{dy})_{y=0}, (\frac{d\omega}{dy})_{y=b}$ より求まる。

又、 $\Delta W = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ (8) 式 (1) と同様に、 x 方向に指数型フーリエ変換、 y 方向にフーリエ Sine 変換を施し、さらに両辺に演算子 Δ をかけ (1) に代入すると。

$$S_n[\Delta W_m] = \frac{1}{\{m^2 + (\frac{n\pi}{b})^2\}} \left\{ \frac{K}{N} S_n[W_m] - (\frac{n\pi}{b}) \{ \Delta W_{mb}(-1)^n - \Delta W_{mo} \} \right\}$$

$\Delta W_{mo} = -m^2 W_{mo} - M_{mo}^*/N$ を考慮して (3) 式を代入し、(4), (5) の操作を施すと。

$$S_n[\Delta W_m] = \frac{(\frac{n\pi}{b})}{\{(\frac{n\pi}{b})^4 + \frac{K}{N}\}N} \left\{ m^2 - (\frac{n\pi}{b})^2 \right\} \{ M_{mo}^* - M_{mb}^*(-1)^n \} + \frac{\frac{n\pi}{b}}{(\frac{n\pi}{b})^4 + \frac{K}{N}} \left\{ m^4 - m^2 (\frac{n\pi}{b})^2 + \frac{K}{N} \right\} \{ W_{mo} - W_{mb}(-1)^n \} \quad (9)$$

x 方向、 y 方向にそれぞれ逆変換を施すと

$$\Delta W = -\frac{b^2}{2N} \{ P(\eta) \ddot{M}_o^* + P(1-\eta) \ddot{M}_b^* \} - \frac{1}{N} \{ Q(\eta) M_o^* + Q(1-\eta) M_b^* \} \\ + \frac{b^2 K}{2N} \{ P(\eta) \omega_o + P(1-\eta) \omega_b \} + \{ Q(\eta) \ddot{\omega}_o + Q(1-\eta) \ddot{\omega}_b \} + \frac{b^2}{2} \{ P(\eta) \ddot{\omega}_o + P(1-\eta) \ddot{\omega}_b \} \quad (10)$$

せん断力を Q とすると

一般に $Q_y = -N \frac{\partial \Delta W}{\partial y}$ (7), (10) より、 $\theta_o, \theta_b, Q_o, Q_b$ は、

$$\theta_o = \frac{b}{2N} (\alpha M_o^* + 2\beta M_b^*) - \frac{1}{b} (\gamma \omega_o + 2\delta \omega_b) \quad \theta_b = \frac{b}{2N} (2\beta M_o^* + \alpha M_b^*) + \frac{1}{b} (2\delta \omega_o + \gamma \omega_b) \quad (11)$$

$$Q_o = \frac{b}{2} (\alpha \ddot{M}_o^* + 2\beta \ddot{M}_b^*) - \frac{1}{b} (\gamma \ddot{M}_o^* + 2\delta \ddot{M}_b^*) - \frac{bK}{2} (\alpha \omega_o + 2\beta \omega_b) \\ + \frac{N}{b} (\gamma \ddot{\omega}_o + 2\delta \ddot{\omega}_b) - \frac{bN}{2} (\alpha \ddot{\omega}_o + 2\beta \ddot{\omega}_b)$$

$$Q_b = -\frac{b}{2} (2\beta \ddot{M}_o^* + \alpha \ddot{M}_b^*) + \frac{1}{b} (2\delta M_o^* + \gamma M_b^*) + \frac{bK}{2} (2\beta \omega_o + \alpha \omega_b) \\ - \frac{N}{b} (2\delta \ddot{\omega}_o + \gamma \ddot{\omega}_b) + \frac{bN}{2} (2\beta \ddot{\omega}_o + \alpha \ddot{\omega}_b)$$

但し

(12)

$$\alpha = \frac{\text{sh}2c - \text{sin}2c}{c(\text{ch}2c - \text{cos}2c)} \quad \beta = -\frac{\text{sh}c \text{cos}c - \text{ch}c \text{sin}c}{c(\text{ch}2c - \text{cos}2c)} \quad \gamma = \frac{c(\text{sh}2c + \text{sin}2c)}{\text{ch}2c - \text{cos}2c} \quad \delta = -\frac{c(\text{sh}c \text{cos}c + \text{ch}c \text{sin}c)}{\text{ch}2c - \text{cos}2c}$$

3. 平板要素から得られる弾性基礎モデルによる解式

右図のような普通平板の基本微分方程式は $\Delta^2 \omega = \frac{q}{N}$ (13)

2. と同様に x 方向に指数型フーリエ変換、 y 方向にフーリエ Sine 変換を施すと

$$S_n[W_m] = -\frac{1}{\{m^2 + (\frac{n\pi}{b})^2\}} \left[\frac{1}{N} (\frac{n\pi}{b}) \{ M_{mb}^*(-1)^n - M_{mo}^* \} + \right. \\ \left. (\frac{n\pi}{b})^3 + 2m^2 (\frac{n\pi}{b}) \{ W_{mb}(-1)^n - W_{mo} \} \right] \quad (14)$$

$$S_n[\Delta W_m] = \frac{(\frac{n\pi}{b})}{m^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} \left[(-1)^n \{ \frac{M_{mb}^*}{N} + m^2 W_{mb} \} - \{ \frac{M_{mo}^*}{N} + m^2 W_{mo} \} \right] \quad (15)$$

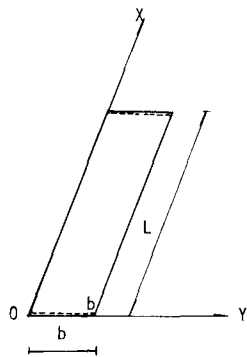


Fig. 2

(14), (15) を y 方向に逆変換し、ベルヌーイの多項式に展開して、微少項を無視し、さらに x 方向に逆変換すると、

$$\omega = b^2 \left[p^* (1-\eta) \frac{\ddot{M}_b^*}{N} + p^* (\eta) \frac{\ddot{M}_0^*}{N} \right] + \eta \omega_b + (1-\eta) \omega_0 \quad (16)$$

$$\Delta \omega = -\eta \frac{\ddot{M}_b^*}{N} - b^2 p^* (1-\eta) \frac{\ddot{M}_b^*}{N} + \eta \ddot{\omega}_b + b^2 p^* (1-\eta) \ddot{\omega}_b \\ - (1-\eta) \frac{\ddot{M}_0^*}{N} - b^2 \frac{\ddot{M}_0^*}{N} p^* (\eta) + (1-\eta) \ddot{\omega}_0 + b^2 p^* (\eta) \ddot{\omega}_0 \quad (17)$$

$$\text{但し } p^*(\eta) = \frac{1}{6} \eta (1-\eta) (2-\eta).$$

となり、これらの式より次の諸式が導かれている。

$$\theta_0 = \frac{b}{6N} (2\ddot{M}_0^* + \ddot{M}_b^*) + \frac{1}{b} (\ddot{\omega}_b - \ddot{\omega}_0) \quad \theta_b = -\frac{b}{6N} (\ddot{M}_0^* + 2\ddot{M}_b^*) + \frac{1}{b} (\ddot{\omega}_b - \ddot{\omega}_0) \quad (18)$$

$$Q_0 = -\frac{1}{b} (\ddot{M}_0^* - \ddot{M}_b^*) + \frac{b}{6} (2\ddot{M}_0^* + \ddot{M}_b^*) + \frac{N}{6} (\ddot{\omega}_0 - \ddot{\omega}_b) - \frac{bN}{6} (2\ddot{\omega}_0 + \ddot{\omega}_b)$$

$$Q_b = -\frac{1}{b} (\ddot{M}_0^* - \ddot{M}_b^*) - \frac{b}{6} (\ddot{M}_0^* + 2\ddot{M}_b^*) + \frac{N}{6} (\ddot{\omega}_0 - \ddot{\omega}_b) + \frac{bN}{6} (\ddot{\omega}_0 + 2\ddot{\omega}_b) \quad (19)$$

基礎地盤反力 P' は新たにたわみの線形変化を仮定して

$$P'_0 = \frac{kb}{6} (2\omega_0 + \omega_b), \quad P'_b = \frac{kb}{6} (\omega_0 + 2\omega_b) \quad (20)$$

となり、普通平板の節点外力として考慮する。

4. 四辺単純支持矩形板のつりあい条件式

任意の r 点での slope の連続、せん断力のつりあいを考えると

$$\theta_{r,r-1} - \theta_{r,r+1} = 0 \\ Q_{r,r-1} - Q_{r,r+1} = P_r \quad (21)$$

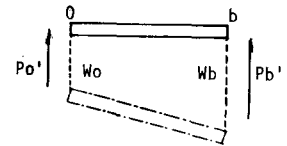


Fig. 3

2. 3. で求められた諸式を (21) に代入する。そして境界条件に留意しながら r 方向にフーリエ変換分変換、 x 方向にフーリエ $\sin$ 変換を施す

2. について

$$\frac{b}{N} (\beta \ddot{M}_{r+1}^* + \alpha \ddot{M}_r^* + \beta \ddot{M}_{r-1}^*) \\ - \frac{2}{b} (\delta \ddot{\omega}_{r+1} + \gamma \ddot{\omega}_r + \delta \ddot{\omega}_{r-1}) = 0 \\ -b (\beta \ddot{M}_{r+1}^* + \alpha \ddot{M}_r^* + \beta \ddot{M}_{r-1}^*) + \frac{2}{b} (\delta \ddot{M}_{r+1}^* + \gamma \ddot{M}_r^* + \delta \ddot{M}_{r-1}^*) \\ + bk (\beta \ddot{\omega}_{r+1} + \alpha \ddot{\omega}_r + \beta \ddot{\omega}_{r-1}) - \frac{2N}{b} (\delta \ddot{\omega}_{r+1} + \gamma \ddot{\omega}_r + \delta \ddot{\omega}_{r-1}) \\ + bN (\beta \ddot{\omega}_{r+1} + \alpha \ddot{\omega}_r + \beta \ddot{\omega}_{r-1}) = P_r$$

3. について

$$\frac{b}{6N} (\ddot{M}_{r+1}^* + 4\ddot{M}_r^* + \ddot{M}_{r-1}^*) \\ + \frac{1}{b} (\omega_{r+1} - 2\omega_r + \omega_{r-1}) = 0 \\ -\frac{1}{b} (\ddot{M}_{r+1}^* - 2\ddot{M}_r^* + \ddot{M}_{r-1}^*) - \frac{b}{6} (\ddot{M}_{r+1}^* + 4\ddot{M}_r^* + \ddot{M}_{r-1}^*) \\ + \frac{N}{b} (\ddot{\omega}_{r+1} - 2\ddot{\omega}_r + \ddot{\omega}_{r-1}) + \frac{bN}{6} (\ddot{\omega}_{r+1} + 4\ddot{\omega}_r + \ddot{\omega}_{r-1}) \\ = P_r - \frac{kb}{6} (\omega_{r-1} + 4\omega_r + \omega_{r+1})$$

$$\frac{b}{N} X S_i[\ddot{M}_r^*] - 2 \left(\frac{Y}{b} + bDX \right) S_i[\ddot{\omega}_r] = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{2Y}{b} - bDX \right) S_i[\ddot{M}_r^*] \\ + (bKX + bND^2X - \frac{2ND}{b} Y) S_i[\ddot{\omega}_r] = S_i[P_r] \quad (23)$$

$$\frac{b}{6N} (6-D_i) S_i[\ddot{M}_r^*] - \frac{D_i}{b} S_i[\ddot{\omega}_r] = 0 \quad (24)$$

$$\left\{ D_i \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{6} D \right) - bD \right\} S_i[\ddot{M}_r^*] \\ - \left\{ ND \left\{ D_i \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{6} D \right) - bD \right\} - \frac{kb}{6} (6-D_i) \right\} S_i[\ddot{\omega}_r] \\ = S_i[P_r] \quad (25)$$

$$\text{但し } \tilde{M}_r^* = \int_0^l M_r^* \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad S_i[\tilde{M}_r^*] = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{M}_r^* \sin \frac{i\pi x}{n} \\ \mathcal{D} = -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \quad X = \left(\alpha + 2\beta \cos \frac{i\pi}{n}\right) \quad Y = \left(\gamma + 2\delta \cos \frac{i\pi}{n}\right) \quad \mathcal{D}i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$$

(22) ~ (25) よりそれぞれの $S_i[\tilde{M}_r^*]$, $S_i[\tilde{\omega}_r]$ が求まり, x 方向, r 方向にそれぞれ変換を施すことにより, ω_r , M_r^* が求まる。つまり

$$M_r^*(x) = \frac{4}{n\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_i[\tilde{M}_r^*] \sin \frac{i\pi r}{n} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \omega_r(x) = \frac{4}{n\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_i[\tilde{\omega}_r] \sin \frac{i\pi r}{n} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ M_{lr}(x) = -N \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = M_r^*(x) - \nu N \ddot{\omega}_r(x), \quad M_{xr}(x) = \nu M_r^*(x) - N \ddot{\omega}_r(x) \quad \text{となる (26)}$$

5. 数値計算

使用断面は, 200cm 四方, 厚さ 15cm の Concrete 板 ($E = 30 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 1/6$) であり, 1 ton の集中荷重を板中央に載荷して, まず弾性基礎上板要素より得られる解式について, 分割による収斂状態を求め (fig. 4), 次にこの解式に対する後者の簡略な解式の精度を分割数と地盤反力について検討してみた (fig. 5-a, b)。なお fig. 中の N は分割数を示している。

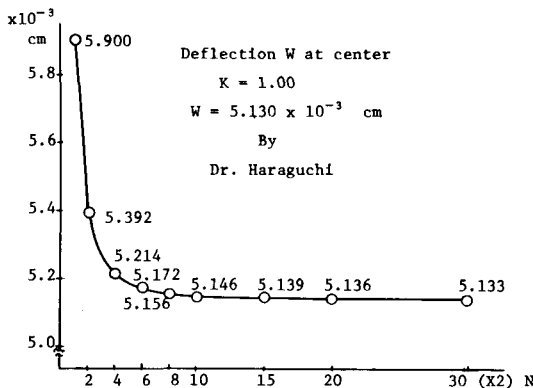


Fig. 4

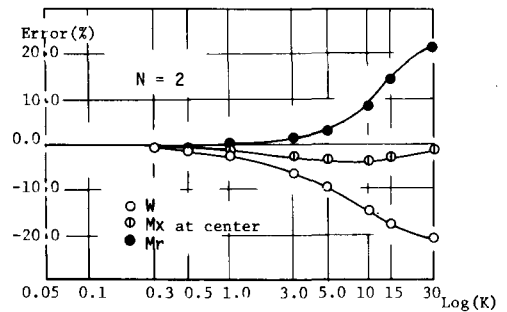


Fig. 5 - a

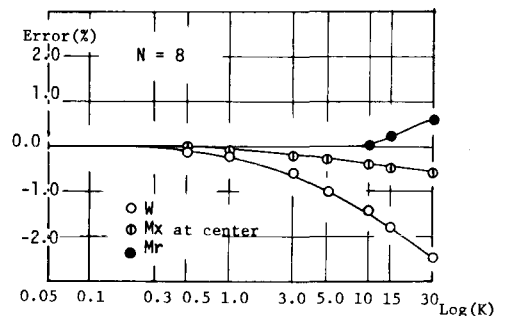


Fig. 5 - b

6. 結び

2 の解式 (厳密解) は 8 分割でも十分良い値を与える。簡略な解式の精度について $K=1$ 以下であると最低 2 分割でも誤差が 2.5% 以下であり, どちらの方法を用いてもよいと思われる。 $K=1$ 以上の場合でも 8 分割で十分の精度が得られる。この結果 簡略な解式でも十分 弾性基礎上の構造物の解析に適用できると思われる。また 解析において用いられた定積分変換は n 分割の場合, $(n-1)$ 個の有限級数和を求めるのみであり, 演算時間的大幅に短縮でき, 非常に有用な手段である。

参考文献 1) S.G. Nomachi; A note on Finite Fourier Transform Concerning Finite Integration (Trans. Mem. Vol 5 NO2)

2) 能町 松岡 堀米; 帯板を要素とする平板の解法について, 土木学会第 24 回 学術講演集

3) 越後 ; 帯板要素法による沈理構造物の応力解析 星 大 修 士 論文