

せん断変形の影響を考慮した薄肉骨組系の剛性マトリクス

北海道大学工学部 正員 稼農 知徳

1. まえがき Wagner [1] によって誘導された曲げねじれ理論を基礎として、数多くの研究がなされ、曲げねじれ理論は系統的にまとめられている [3, 4]。曲げねじれは薄肉線と構成する各母線のねじれ率とその軸方向にもはや一定でないから、薄肉材は曲げねじれを受けると、ねじれによる断面のそりや軸方向に変化する。即ち、そりは拘束さうける軸方向に垂直ひずみとこれにみあう2次のせん断ひずみが生ずる。この曲げねじれ理論による構造設計に際して、垂直応力の計算には2次のせん断ひずみの影響を無視しているのが普通である。また足際設計上、一般財にはこれで十分であると思われる。しかし、この2次のせん断ひずみの影響が部材によっては無視し得ない場合がある。部材断面寸法に比して部材軸長方向に短い場合および固定端のようなそり拘束の強固な部材などにはもはや無視することは許し得ない。この2次せん断変形を考慮した曲げねじれ理論もすでに多くの研究がある [4~9]。一方、薄肉構造物の解析においても変形法による解析が複雑化する薄肉骨組系に対しては、多くの有利性をもつことが認められている。従ってこの2次せん断変形の影響を考慮した薄肉部材の剛性マトリクスを誘導することは薄肉骨組系の解析をより容易にするものと考えらる。剛性マトリクスを誘導するために、微分方程式を基にしてより簡明な Antangparameter Method の手法をとっている。

2. 仮定とせん断変形を考慮した基礎微分方程式 薄肉直線材を対象として、主体3-x2構造を考へる。Abb. 1 に示すように、部材軸方向にz軸を定め、これに右手系をなすようなx軸、y軸を点Oを通うように定める。一般的に、軸力と2つの面の曲げに由る基礎微分方程式は曲げ理論より得られ、曲げねじれに關する基礎微分方程式は曲げねじれ理論より求められる。特にせん断変形を考慮した基礎微分方程式を示す式(1)と式(2)に示すものとなる。

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = n_z, \quad \frac{d^4 u_H(z)}{dz^4} = \frac{\partial z}{EJ_y}, \quad \frac{d^4 u_S(z)}{dz^4} = -\frac{q_x}{GA_{ix}},$$

$$\frac{d^4 v_H(z)}{dz^4} = \frac{q_y}{EJ_x}, \quad \frac{d^4 v_S(z)}{dz^4} = -\frac{q_y}{GA_{iy}},$$

--- (1) a-e

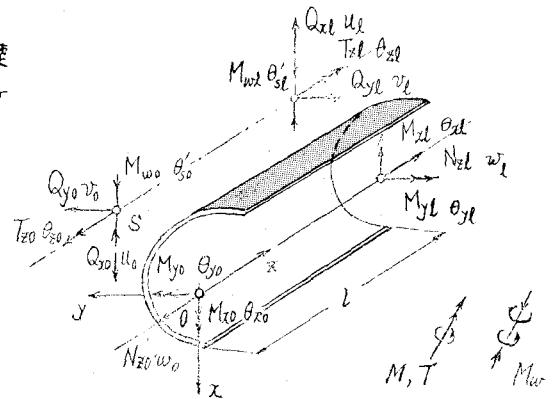


Abb. 1 部材要素、座標、変形、断面力

ここで n_z は薄肉部材要素上に分布した軸力でありもし分布軸力が無いものとすれば、要素内応力は一定である。 $u_H(z)$, $v_H(z)$ は曲げによる変位、 $u_S(z)$, $v_S(z)$ はせん断による変位である。

$$GJ_T \frac{d^2 \theta_z(z)}{dz^2} - EJ_\omega \frac{d^3 \theta_z(z)}{dz^3} = T_z,$$

$$\frac{d \theta_z(z)}{dz} - \mu \frac{d \theta_z(z)}{dz} = \frac{T_z}{GJ_c}, \quad \mu = 1 - \frac{J_T}{J_c},$$

$$J_c = \int_H r^2 dF \quad \text{--- (2) a-d} \quad \text{ここで } \theta'_z(z) \text{ は}$$

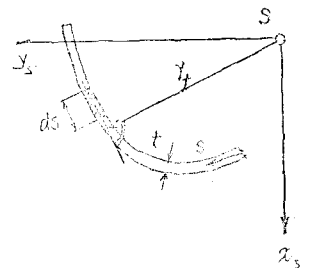


Abb. 2 横断面座標

ねじれ率であり、 $\theta'_z(z)$ は軸変位の軸方向変化である。また、 J_c はねじれ中心軸に關する断面二次モーメントで Abb. 2 を参照。式(2)は文献 [3] を参照しているが、他の文献 [4~9] においても基礎微分方程式はせん断変形の影響係数が異なっている。たとえば、文献 [6, 9] と μ との関係式は式(3)となる。

$$\mu = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (\text{文献}[6]) \quad \mu = \frac{1}{1+\alpha} \quad (\text{文献}[9]) \quad \text{-----} (3) a, b$$

さらに、断面力と変位の関係式として式(4)と式(5)を得る。

$$N_z(z) = EF \frac{dw(z)}{dz}, \quad Q_x(z) = GA_{xz} \frac{du_x(z)}{dz}, \quad Q_y(z) = GA_{yz} \frac{dv_z(z)}{dz}, \quad M_y(z) = -EI_y \frac{d^2u_x(z)}{dz^2}, \\ M_z(z) = -EI_z \frac{d^2v_z(z)}{dz^2}, \quad T_{zw}(z) = GJ \frac{d\theta_z(z)}{dz} - EI_{\omega} \frac{d^3\theta_z(z)}{dz^3}, \quad M_{\omega}(z) = -EI_{\omega} \frac{d^2\theta_z(z)}{dz^2} \quad \text{-----} (4) a-g$$

$$\frac{dN_z(z)}{dz} = -n_z, \quad \frac{dQ_x(z)}{dz} = -q_x, \quad \frac{dQ_y(z)}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_y(z)}{dz} = Q_x(z), \quad \frac{dM_z(z)}{dz} = Q_y(z)$$

$$\frac{dM_{\omega}(z)}{dz} = T_{zw}(z) \quad \text{-----} (5) a-f \quad \text{ここで, } N_z(z) = \text{軸力} \quad Q_x(z), Q_y(z) = \text{せん断}$$

力, $M_y(z), M_z(z)$ = 曲げモーメント, $T_{zw}(z)$ = 2次ねじれモーメント, $T_{zs}(z)$ = 1次ねじれモーメント, $T_z(z)$ = 全ねじれモーメント, $M_{\omega}(z)$ = 曲げねじれモーメントである。

3. せん断変形を考慮した剛性マトリクス 一軸材の断面を有する薄肉部材を構成要素とする立体ラーメン要素の剛性は z 軸方向の変位(伸び)によって生ずる z 方向の軸方向剛性とし、 y 方向の変位(たわみ)によって生ずる x, y 方向の曲げ剛性(ス- z 平面内に作用する節点力に関する剛性および y - z 平面内に作用する節点力に関する剛性)およびせん断中心軸に関するねじれ角変位によって生ずるねじれ剛性、曲げねじれ剛性に分離することができる。

(1) 軸方向力に関する剛性マトリクス 薄肉部材要素上に

は分布した軸力は存在しないと考えるから、式(1)aより、

$$\frac{dw(z)}{dz} = C_1 \quad \text{-----} (6) \quad \text{式(6)を積分して、}$$

$$w(z) = C_1 z + C_2 \quad \text{-----} (7) \quad \text{式(7)aより式(8)を代入して}$$

$$N_z(z) = EF C_1 \quad \text{-----} (8)$$

Anfangparameter 法により、 $z=0$ における端条件を代入

$$\text{すると、} w_0 = C_2, \quad N_{z0} = EF C_1 \quad \text{-----} (9) a, b$$

故に、式(10)を得る。

$$w(z) = w_0 + \frac{N_{z0}}{EF} \cdot z, \quad N_z(z) = N_{z0} \quad \text{-----} (10) a, b$$

式(10)に $z=L$ における端条件を代入すると式(11)となる。

$$\left. \begin{aligned} w_L &= w_0 + \frac{N_{z0}}{EF} \cdot L \\ N_{zL} &= N_{z0} \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (11) a, b$$

式(11)を N_0, N_L について解いてマトリクス表示すると式(12)を得る。

ただし変位法における記号と方向の慣習に従って変換されている。

$$\begin{Bmatrix} N_{zi} \\ N_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & -\frac{EF}{L} \\ -\frac{EF}{L} & \frac{EF}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad \text{-----} (12)$$

(2) 曲げに関する剛性マトリクス 平面ラーメン要素の剛性マトリクスとして x - z 平面内に作用する節点力に関するものを導く。式(1)b,cより、要素上に作用荷重がないとすると、式(11)とより式(13)aを

$$EI_y \frac{d^4 u_x(z)}{dz^4} = 0, \quad GA_{xz} \frac{d^2 u_x(z)}{dz^2} = 0 \quad \text{-----} (13) a, b \quad \text{積分すると、般解は式(14)となる。}$$

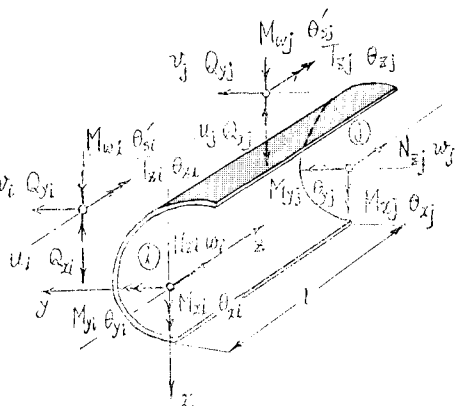


Abb. 3 変位法に対する変形と断面力

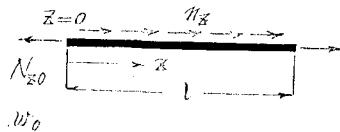


Abb. 4 軸力と部材要素

$$u_M(z) = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4 \quad \text{--- (14)}$$

式(14)と式(5)dおよび $\theta_y(z) = u'_M(z)$ とおき、ことごとから式(15)を得る。

$$\left. \begin{aligned} \theta_y(z) &= 3C_1 z^2 + 2C_2 z + C_3 \\ M_y(z) &= -EJ_y \cdot 6(C_1 z + C_2) \\ Q_x(z) &= -EJ_y \cdot 6C_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (15)a-c}$$

Anfangparameter 法により $z=0$ における端条件を代入すると、

$$u_{M0} = C_4, \quad \theta_{y0} = C_3, \quad M_{y0} = -2EJ_y C_2, \quad Q_{x0} = -6EJ_y C_1 \quad \text{--- (16)a-d}$$

$$\left. \begin{aligned} u_M(z) &= u_{M0} + \theta_{y0} \cdot z - \frac{M_{y0}}{2EJ_y} \cdot z^2 - \frac{Q_{x0}}{6EJ_y} \cdot z^3 \\ \theta_y(z) &= \theta_{y0} - \frac{M_{y0}}{EJ_y} \cdot z - \frac{Q_{x0}}{2EJ_y} \cdot z^2 \\ M_y(z) &= M_{y0} + Q_{x0} \cdot z \\ Q_x(z) &= Q_{x0} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (17)a-d}$$

Abb. 5. 曲げとせん断と部材要素

一方、式(13)bを積分し式(4)_bを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} u_s(z) &= D_1 \cdot z + D_2 \\ Q_x(z) &= GA_{sx} \cdot D_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (18)a}$$

$$\text{Anfangparameter 法により, } u_s(z) = u_{s0} + \frac{Q_{x0}}{GA_{sx}} \cdot z, \quad Q_x(z) = Q_{x0} \quad \text{--- (19)a-b}$$

従って、 $u(z) = u_M(z) + u_s(z)$ であること、接合角は曲げによる接合角成分 $u'_M(z)$ のみが他部材との連続の条件を満たしていることを考慮すれば、式(17)と式(20)となる。但し $\theta_y(z) = u'_M(z)$

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= u_0 + \theta_{y0} \cdot z - \frac{M_{y0}}{2EJ_y} \cdot z^2 - Q_{x0} \left(\frac{z^3}{6EJ_y} - \frac{z}{GA_{sx}} \right) \\ \theta_y(z) &= \theta_{y0} - \frac{M_{y0}}{EJ_y} \cdot z - \frac{Q_{x0}}{2EJ_y} \cdot z^2 \\ M_y(z) &= M_{y0} + Q_{x0} \cdot z \\ Q_x(z) &= Q_{x0} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (20)a-d}$$

式(20)に $z=l$ における端条件を代入すると式(21)を得る。

$$\left. \begin{aligned} u_l &= u_0 + \theta_{y0} \cdot l - \frac{M_{y0}}{2EJ_y} \cdot l^2 - Q_{x0} \left(\frac{l^3}{6EJ_y} - \frac{l}{GA_{sx}} \right) \\ \theta_{yl} &= \theta_{y0} - \frac{M_{y0}}{EJ_y} \cdot l - \frac{Q_{x0}}{2EJ_y} \cdot l^2 \\ M_{yl} &= M_{y0} + Q_{x0} \cdot l \\ Q_{xl} &= Q_{x0} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (21)a-d}$$

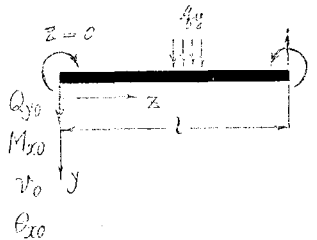


Abb. 6. 曲げとせん断と部材要素

式(21)と M_{y0}, M_{yl}, Q_{x0} および Q_{xl} について解いてマトリクス表示をすれば、式(22)を得る。

ただし変位法における記号と方向の慣習に従って変換されている。ここで、

$$\eta_x = \frac{12EJ_y}{GA_{sx} l^2}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\eta_x} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{l^3} & \frac{6EJ_y}{l^2} & -\frac{12EJ_y}{l^3} & \frac{6EJ_y}{l^2} \\ \frac{6EJ_y}{l^2} & (4+\eta_x) \frac{EJ_y}{l} & -\frac{6EJ_y}{l^2} & (2-\eta_x) \frac{EJ_y}{l} \\ -\frac{12EJ_y}{l^3} & -\frac{6EJ_y}{l^2} & \frac{12EJ_y}{l^3} & -\frac{6EJ_y}{l^2} \\ \frac{6EJ_y}{l^2} & (2-\eta_x) \frac{EJ_y}{l} & -\frac{6EJ_y}{l^2} & (4+\eta_x) \frac{EJ_y}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_{yi} \\ u_j \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \quad \text{--- (22)}$$

同様に x, y, z 平面内に関する剛性マトリクスも得られ式 (23) のようになる。ここで $\eta_y = \frac{12 EJ_x}{GA_{xy} l^2}$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+\eta_y} \begin{bmatrix} \frac{12 EJ_x}{l^3} & -\frac{6 EJ_x}{l^2} & -\frac{12 EJ_x}{l^3} & -\frac{6 EJ_x}{l^2} \\ -\frac{6 EJ_x}{l^2} & (4+\eta_y) \frac{EJ_x}{l} & \frac{6 EJ_x}{l^2} & (2-\eta_y) \frac{EJ_x}{l} \\ -\frac{12 EJ_x}{l^3} & \frac{6 EJ_x}{l^2} & \frac{12 EJ_x}{l^3} & \frac{6 EJ_x}{l^2} \\ -\frac{6 EJ_x}{l^2} & (2-\eta_y) \frac{EJ_x}{l} & \frac{6 EJ_x}{l^2} & (4+\eta_y) \frac{EJ_x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

(3). 曲げねじれに関する剛性マトリクス x, z 断面変形の影響を考慮した曲げねじれ理論から曲げねじれに関する剛性マトリクスを導く。ここで留意すべきことは曲げねじれモーメントとは等なる共軌量はねじれ率 θ'_s であり、ねじれモーメント T_z とは等なる共軌量はねじれ角 θ_z である。すなわち、 $[T_z, \theta_z], [M_w, \theta'_s]$ となる。式 (2) より $\frac{d^4 \theta_z(z)}{dz^4}$ を消去して、式 (24) を得る。

$$\frac{d^4 \theta_z(z)}{dz^4} - \lambda^2 \frac{d^2 \theta_z(z)}{dz^2} = -\frac{\mu}{EJ_w} T_z, \quad \lambda^2 = \mu \frac{GJ_T}{EJ_w} \quad (24) a, b$$

部材要素上には分布荷重 T_z が作用しないことから、式 (23) に属する同次微分方程式が有効である。

$$\frac{d^4 \theta_z(z)}{dz^4} - \lambda^2 \frac{d^2 \theta_z(z)}{dz^2} = 0 \quad (25)$$

式 (25) の一般解は $\theta_z(z) = C_1 \sinh \lambda z + C_2 \cosh \lambda z + C_3 \cdot z + C_4$ --- (26)

式 (2)・(4) f, g より式 (26) を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} M_w(z) &= -EJ_w (C_1 \lambda^2 \sinh \lambda z + C_2 \lambda^2 \cosh \lambda z) \\ T_z(z) &= GJ_T C_3 \end{aligned} \right\} \quad (27) a, b$$

Anfangsparameter 法により、 $z=0$ における端条件を代入すると、

$$\theta_{z0} = C_2 + C_4, \quad \theta'_{z0} = \lambda C_1 + C_3, \quad M_{w0} = -\lambda^2 EJ_w C_2, \quad T_{z0} = GJ_T C_3 \quad (28) a-d$$

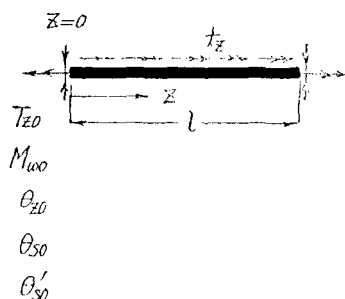


Abb. 7 ねじれと曲げねじれと部材要素

故に、式 (29) を得る。

$$\left. \begin{aligned} \theta_z(z) &= \theta_{z0} + \theta'_{z0} \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z + \frac{M_{w0}}{\mu GJ_T} (1 - \cosh \lambda z) + \frac{T_{z0}}{\lambda GJ_T} (\lambda z - \sinh \lambda z) \\ \theta'_z(z) &= \theta'_{z0} \cosh \lambda z - \frac{M_{w0}}{\mu GJ_T} \lambda \sinh \lambda z + \frac{T_{z0}}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda z) \\ M_w(z) &= -\theta'_{z0} \frac{\mu}{\lambda} GJ_T \sinh \lambda z + M_{w0} \cosh \lambda z + T_{z0} \frac{\mu}{\lambda} \sinh \lambda z \\ T_z(z) &= T_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (29) a-d$$

さらに式 (2) b より、1回積分して式 (30) を得て式 (30) を式 (29) a, d を代入する。

$$\theta_z(z) = \mu \theta_s(z) + \frac{T_{z0}}{GJ_c} \cdot z + C \quad (30)$$

$$\theta_z(z) = \theta'_{z0} \frac{\mu}{\lambda} \sinh \lambda z + \frac{M_{w0}}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda z) + \frac{T_{z0}}{GJ_T} \frac{\mu}{\lambda} (\lambda z - \sinh \lambda z) + \frac{T_{z0}}{GJ_c} \cdot z + C$$

ここで、Anfangsparameter 法により、 $z=0$ における端条件を代入すると、式 (31) を得る。

$$\theta_z(z) = \theta_{z0} + \theta'_{z0} \frac{\mu}{\lambda} \sinh \lambda z + \frac{M_{w0}}{GJ_T} (1 - \cosh \lambda z) + \frac{T_{z0}}{GJ_T} \frac{1}{\lambda} (\lambda z - \mu \sinh \lambda z) \quad (31)$$

従って式 (29) b-d と式 (31) をあわせて、 $z=l$ における端条件を代入すると式 (32) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{zl} &= \theta_{z0} + \theta'_{s0} \frac{\mu}{\lambda} sh\lambda l + \frac{M_{w0}}{GJ_T} (1 - ch\lambda l) + \frac{T_{z0}}{GJ_T} \frac{1}{\lambda} (\lambda l - \mu sh\lambda l) \\ \theta'_{zl} &= \theta'_{s0} ch\lambda l - \frac{M_{w0}}{GJ_T} \frac{\lambda}{\mu} sh\lambda l + \frac{T_{z0}}{GJ_T} (1 - ch\lambda l) \\ M_{wl} &= -\theta'_{s0} \frac{\mu}{\lambda} GJ_T sh\lambda l + M_{w0} ch\lambda l + T_{z0} \frac{\mu}{\lambda} sh\lambda l \\ T_{zl} &= T_{z0} \end{aligned} \right\} \text{---- (32) a-d}$$

式(32)を T_{z0} , M_{w0} , T_{zl} , M_{wl} について解いてマトリクス表示すると式(33)を得る。ただし、変位法における記号と方向の慣習に従って変換されている。

$$\begin{bmatrix} T_{zi} \\ M_{wi} \\ T_{zj} \\ M_{wj} \end{bmatrix} = \frac{EJ_w}{D} \begin{bmatrix} \lambda^2 sh\lambda l & \mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & -\lambda^2 sh\lambda l & \mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) \\ \mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & \mu \lambda (\lambda ch\lambda l - \mu sh\lambda l) & -\mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & \mu \lambda (\mu sh\lambda l - \lambda l) \\ -\lambda^2 sh\lambda l & -\mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & \lambda^2 sh\lambda l & -\mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) \\ \mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & \mu \lambda (\mu sh\lambda l - \lambda l) & -\mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1) & \mu \lambda (\lambda ch\lambda l - \mu sh\lambda l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta'_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta'_{zj} \end{bmatrix} \text{---- (33)}$$

$$D = \mu \{ \lambda l sh\lambda l - 2\mu (ch\lambda l - 1) \}$$

(4) 立体ラーメン薄肉部材要素の剛性マトリクス セン断変形を考慮した立体ラーメン薄肉部材要素の剛性マトリクスは式(12), (22), (23)および(33)を組合せることにより求められる。すなわち力と変位のベクトル

$$\mathbf{P} = [Q_{zi}, Q_{yj}, N_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, T_{zi}, M_{wi}, Q_{zj}, Q_{yj}, N_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, T_{zj}, M_{wj}]^*$$

$$\mathbf{d} = [u_i, v_i, w_i, \theta_{zi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \theta'_{zi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{zj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}, \theta'_{zj}]^* \quad \text{を用いて、式}$$

(34)を得る

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} \text{---- (34)} \quad \text{ここで、}\mathbf{P}\text{と}\mathbf{d}\text{は14要素の4元ベクトルで、}\mathbf{K}\text{は14}\times\text{14の}$$

正対称マトリクスで求められる剛性マトリクスである。 $\mathbf{K}$ を示すと式(35)となる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{(1+\eta_z)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_y}{(1+\eta_z)l^2} & \cdot & \cdot & \frac{12EJ_y}{(1+\eta_z)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_y}{(1+\eta_z)l^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{12EJ_x}{(1+\eta_y)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_x}{(1+\eta_y)l^2} & \cdot & \cdot & \frac{12EJ_x}{(1+\eta_y)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_x}{(1+\eta_y)l^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{EF}{l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EF}{l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{(4+\eta_z)EJ_z}{(1+\eta_z)l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_z}{(1+\eta_z)l^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(4+\eta_z)EJ_y}{(1+\eta_z)l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{11}}{D} & \frac{EJ_w \gamma_{12}}{D} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{22}}{D} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EJ_y}{(1+\eta_z)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_y}{(1+\eta_z)l^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EJ_x}{(1+\eta_y)l^3} & \cdot & \cdot & \frac{6EJ_x}{(1+\eta_y)l^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EF}{l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(4+\eta_y)EJ_z}{(1+\eta_z)l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(4+\eta_z)EJ_y}{(1+\eta_z)l} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{11}}{D} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{22}}{D} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{11}}{D} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{22}}{D} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EJ_w \gamma_{22}}{D} \end{bmatrix} \text{---- (35)}$$

Symm.

$$\text{ただし、} \gamma_{11} = \lambda^2 sh\lambda l, \gamma_{12} = \mu \lambda^2 (ch\lambda l - 1), \gamma_{13} = \gamma_{11}, \gamma_{14} = \gamma_{12}, \gamma_{22} = \mu \lambda (\lambda l ch\lambda l - \mu sh\lambda l), \\ \gamma_{23} = \gamma_{12}, \gamma_{24} = \mu \lambda (\mu sh\lambda l - \lambda l)$$

4. 数値計算例 応力法による

解析結果と比較するため、文献[8]に示されている連続桁について解析する。断面値は次の通りである。

$$J_w = 2,230 \text{ m}^6, J_T = 0,668 \text{ m}^4$$

$$\mu = 0,328, J_c = 0,994 \text{ m}^4$$

Abb. 8 は中間支点 6 における曲げねじれモーメントの影響線である。当然のことながら文献[8]の結果と全く一致している。数値的計算例は別表する。

5. あとがき 本文はせん断変形の影響を考慮した剛性マトリクスを導出して薄肉骨組構造物の立体解析を可能にしたものである。この場合、薄肉部材要素のせん断中心軸は一致しているものとする。この結果薄肉部材要素を構成要素とする各種構造物の解析が簡単に求められることになる。この計算には Universität (TH) Karlsruhe Rechenzentrum UNIVAC 1108 を用いたことを附記する。

参考文献:

- [1] WAGNER, H. & PRETSHNER, W.: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrt-Forschung, Band 11, 1934.
- [2] KAPPUS, R.: Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich, Luftfahrt-Forschung, Band 14, 1937.
- [3] BORNSEHEIMER, F. W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, Heft 1, 1952.
- [4] WLASSOW, W. Z.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1, VEB Verlag für Bauwesen, 1964.
- [5] BANSICOTER, S. U.: A Theory of Torsion Bending of Multicell Beams, Journal of Applied Mechanics, Vol. 21, 1954.
- [6] HETTLIG, R.: Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil, Stahlbau, Heft 4, 1961 und Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Stahlbau, Heft 11, 1961.
- [7] GRASSE, W.: Wölbkrafttorsion dünnwandiger prismatischer Stäbe beliebigen Querschnitts, Ingenieur-Archiv, Band 34, 1965.
- [8] ROIK, K. & SEDLACEK, G.: Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Analogiebetrachtung zur Berechnung des quer belasteten Zugstabes, Stahlbau, Heft 2, 1966.
- [9] SAEKI, N.: Warping Torsion Theory in Consideration of the Deformation due to Secondary Shearing Stress and its Numerical Examples, The Proceedings of JSCE, No. 209, 1973.
- [10] ARGYRIS, J. H. und RADAT, D.: Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger Stäbe und Stabsysteme, Ingenieur-Archiv, Band 40, 1971. v. Sohn, Berlin, München ..., 1972
- [11] ROIK, K., CARL J. und LINDNER J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe, Wilhelm Ernst

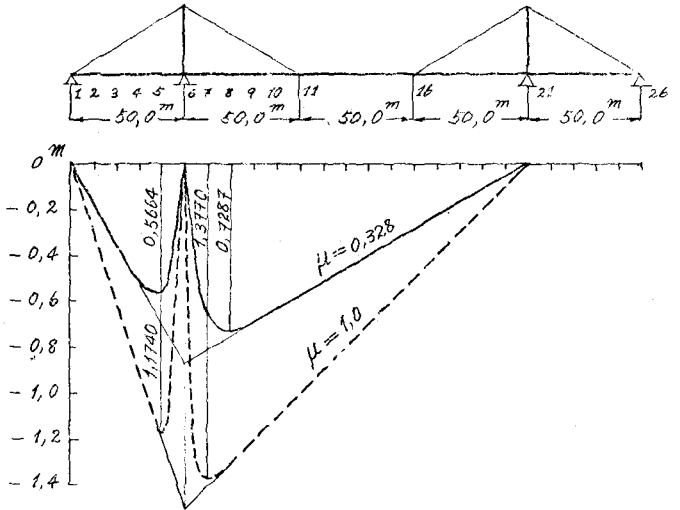


Abb. 8 支点 6 における曲げねじれモーメントの影響線