

## 板・トラス立体構造の曲げおよびねじれ特性について

北海道大学 正員 渡辺 昇  
 北海道大学 正員 佐藤 浩一  
 北海道大学 学生員 ○ 片山 修

## 1. まえがき

図-1 (a) のような棒のみからなる立体トラスと、図-1 (b) のような板と棒とよりなる立体トラスについて、曲げ荷重およびねじり荷重を作用し、その構造特性を調べた。

## 2. 板・トラス立体構造の剛性マトリックスによる解析法

図-1 (b) において、板の部分はシャイベとして扱い、これはシャイベの面内荷重  $H_x$  や  $H_y$  のみに抵抗するものとする。骨組の部分はトラス立体構造として扱い、鉛直荷重  $P_i$  や水平荷重  $H_x$ ,  $H_y$  など任意の節点荷重に抵抗するものとする。シャイベにおける変形および応力解析は三角形要素による有限要素法を用いる。一つの有限要素による剛性マトリックスは式 (1) のとおりである。また棒のみからなる立体トラスの剛性マトリックスは式 (2) のとおりである。ここで  $A$ ,  $L$  は  $i$  点と  $j$  点に両端を位置する部材の断面積と長さであり、 $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  はそれぞれ全体座標系における部材の  $X$  軸,  $Y$  軸,  $Z$  軸に対する方向余弦である。各節点の

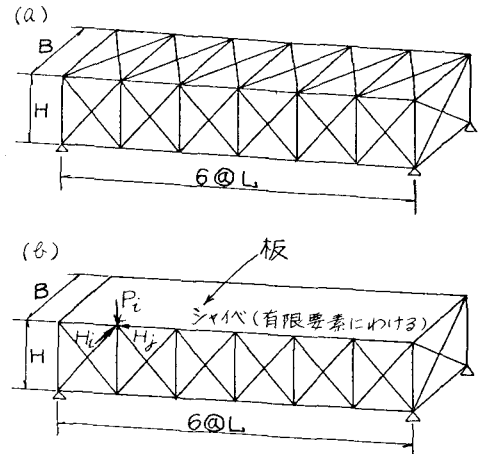


図-1

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} (b_j - b_k)^2 + \frac{1}{2}(a_k - a_j)^2 & \frac{1}{2}(a_k - a_j)(b_j - b_k) & b_k(b_j - b_k) & \frac{1}{2}\nu b_k(a_k - a_j) & -b_j(b_j - b_k) & -\frac{1}{2}\nu b_j(a_k - a_j) \\ \frac{1}{2}(b_j - b_k)(a_k - a_j) & \frac{1}{2}(b_j - b_k)^2 + \frac{1}{2}(a_k - a_j)^2 & -\frac{1}{2}a_k(a_k - a_j) & -\nu a_k(b_j - b_k) & +\frac{1}{2}\nu a_j(a_k - a_j) & +\nu a_j(b_j - b_k) \\ -\frac{1}{2}a_k(b_j - b_k) & -\frac{1}{2}a_k(a_k - a_j) & b_k^2 + \frac{1}{2}a_k^2 & -\frac{1}{2}a_k b_k & -b_j b_j & -\frac{1}{2}a_j b_k \\ \frac{1}{2}\nu a_k b_k & -\nu a_k(b_j - b_k) & -\frac{1}{2}a_k b_k & -\frac{1}{2}\nu a_k a_j & \frac{1}{2}\nu a_j b_j & +\nu a_j b_k \\ \frac{1}{2}\nu a_j(a_k - a_j) & +\nu a_j(b_j - b_k) & -\frac{1}{2}a_j b_j & -\frac{1}{2}\nu a_j a_j & -\frac{1}{2}a_k b_j & -\frac{1}{2}\nu a_k b_j \\ \frac{1}{2}\nu a_j b_k & -\frac{1}{2}\nu a_j(a_k - a_j) & -\frac{1}{2}a_j b_k & -\frac{1}{2}\nu a_j b_j & \frac{1}{2}\nu a_k b_j & +\nu a_k b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

右上半分に対称

ただし  $i$  点を原点にとる ( $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ ), また  $k = \frac{E}{2(a_j b_k - a_k b_j)}$

変形と外力との関係は線形であるので図-1 (b) のような板・トラス立体構造の剛性マトリックスは、式 (1) と式 (2) とを重ね合せたものである。したがって当然のことではあるが接続するトラス部材が全くないシャイベ内の節点における変位については式 (1) と式 (2) とを重ね合せによる全体剛性マトリックスの中に、その面外方向の変位は考えない。

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} X^2 & \lambda\mu\lambda\nu & -X^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu \\ \mu^2 & \mu\nu & -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu \\ \nu^2 & -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 \\ \text{SYM.} & X^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ & \mu^2 & \mu\nu \\ & & \nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 3. 棒のみからなる立体トラスの構造特性

#### (1) 構造および支承条件

構造は図-2のようなものを扱う。

支承条件として主構上弦材両端における節点(1), (7), (8), (14)および主構下弦材両端における節点(15), (21), (22), (28)をいずれもヒンジをもって固定してある。

#### (2) 荷重条件

荷重条件としては、図-3のように、上弦材上の節点(1)~(7)には下向きの鉛直荷重 $P$ を、同じく節点(8)~(14)には上向きの鉛直荷重 $P$ を載荷させることにより、トラスにねじり荷重を作用させる。ただし次の(3)における「曲げ荷重とねじり荷重による鉛直変位」の場合については、上弦材上の節点(1)~(7)にのみ下向きの鉛直荷重 $P$ を載荷させることにより、曲げ荷重とねじり荷重とを同時に作用させる。

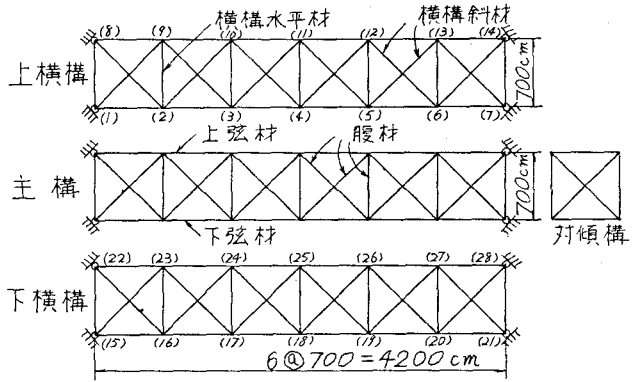


図-2

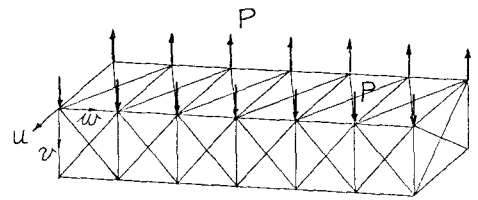


図-3

#### (3) 曲げ荷重とねじり荷重による鉛直変位

上弦材A線上に鉛直荷重 $P=1$ が移動するときの鉛直変位の影響線は、図-4に示す通りである。ところで上弦材A線上の全節点(1)~(7)に $P=1$ の鉛直荷重が作用する時の節点(4)と節点(11)の鉛直たわみはそれぞれ

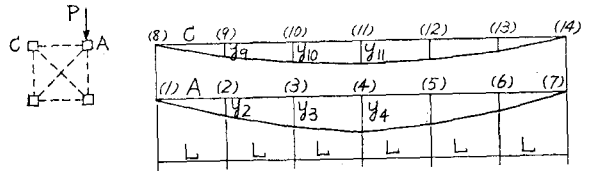


図-4

$$v_4 = (2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

$$v_{11} = (2y_9 + 2y_{10} + y_{11})$$

となる

それをいま図-5に示すように曲げとしてのたわみ $v_m$ とねじりとしてのたわみ $v_t$ とに分けて考える。

$$v_{11} \quad v_4 = \boxed{v_m} + \boxed{v_t}$$

図-5

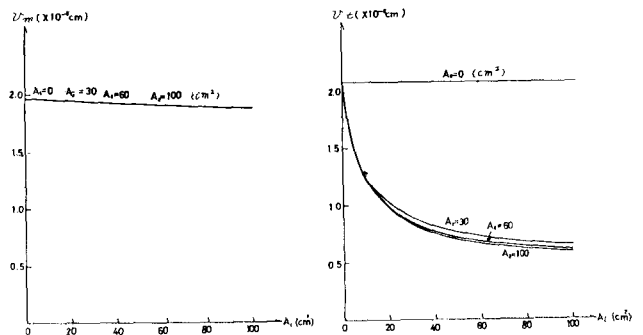


図-6

$$v_m = \frac{v_4 + v_{11}}{2}, \quad v_t = \frac{v_4 - v_{11}}{2} \quad (3)$$

そこでこれらの  $v_m$  と  $v_e$  をそれぞれ一つのパラメーターとして、これらと上横構部材断面積との関係をグラフにしたものが、図-6 (a), (b) である。ただしこれらのグラフは  $A_s = 0, 30, 60, 100 \text{ cm}^2$  の4つの場合についてのものである。

また図-6 とは逆に、上横構部材断面積を一定にしておくときの、 $v_m$  ならびに  $v_e$  と対傾構断面積  $A_s$  との関係をグラフにしたものが図-7 (a), (b) である。ただしこれらのグラフは上横構断面積  $A_e = 0, 30, 60, 100 \text{ cm}^2$  についてのものである。荷重は節点 (1) ~ (7) にも  $P=1$  の鉛直荷重をかけてある。

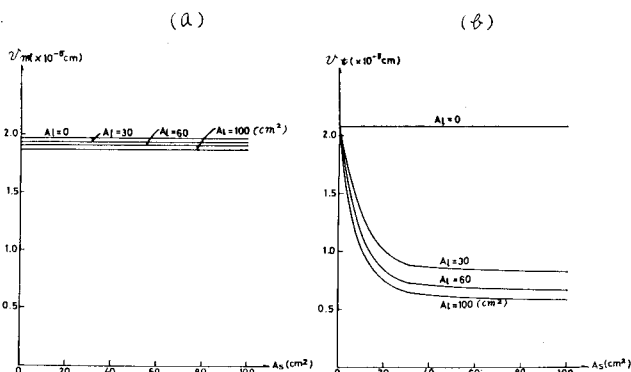


図-7

#### (4) そり変位について

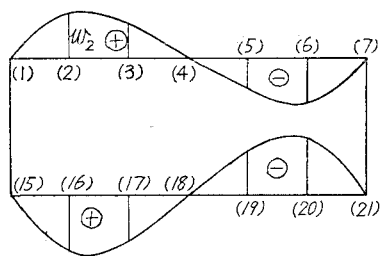


図-8

図-3 に示したようなねじり荷重をかけ

ることにより、図-8 に示すようなそり変位  $w$  が生ずる。構造は前後左右に対称であるので、図-3 におけるねじり荷重に対しては、前後左右の中央線に対して対応する一組の節点のそり変位は、大きさが等しく向きは逆となる。そこでいま節点 (2) におけるそり変位  $w_2$  に着目して、対傾構断面積  $A_s$  を一定としたときの  $w_2$  と上横構断面積  $A_e$  との関係、また  $A_e$  を一定としたときの  $w_2$  と  $A_s$  との関係をグラフにしたものが図-9 の (a), (b) である。

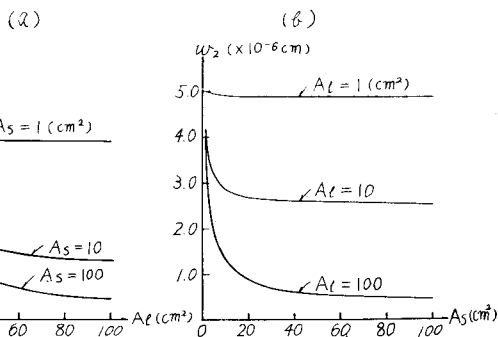
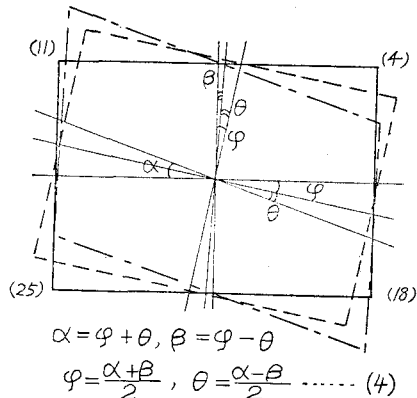


図-9

#### (5) ねじれ角 $\varphi$ とずれ角 $\theta$ について



$$\alpha = \varphi + \theta, \beta = \varphi - \theta$$

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \dots (4)$$

図-10

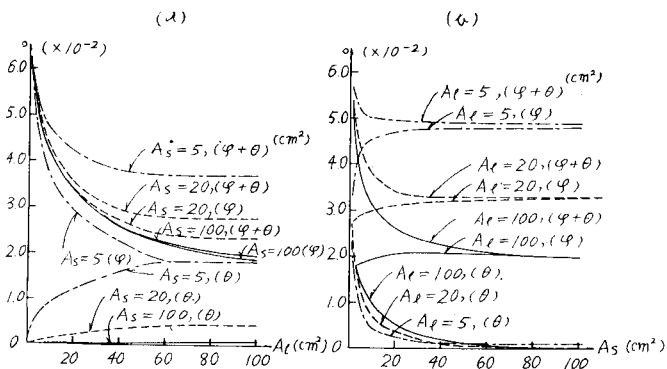


図-11

図-3に示したねじり荷重をかけることにより、立体トラス構造の横断面内では、図-10に示したようなねじれを生ずる。このねじれはさらに、図-10に示すようにねじれ角 $\varphi$ とずれ角 $\theta$ とに分けて考えることができる。そして近似的には式(4)がいまの場合に当てはまるものとする。そこで対傾構断面積を一定としたときの、横構断面積 $A_t$ と $(\varphi+\theta)$ 、 $\varphi$ 、 $\theta$ との関係を、また $A_t$ を一定としたときの $A_s$ と $(\varphi+\theta)$ 、 $\varphi$ 、 $\theta$ との関係をグラフにしたものが、それぞれ図-11(a)、(b)である。ただしこの場合の等節鉛直荷重は $P=10000\text{ kg}$ であり、またこのグラフをかくのに用いた立体トラスの横断面は、図-10に示したように節点(1)、(18)(25)、(11)によって構成されている支間中央断面である。

#### 4. 板トラス橋の構造特性

##### (1) 構造および支承条件

構造については図-1(a)の立体トラス橋のモデルにおける上弦材、上横構水平材、上横構斜材を面内力のみで抵抗するシャイブでおきかえたものを用いる。他の部材については断面積、長さを等しくおき、構造に関する寸法も図-1(a)の場合と全く等しくしてある。

支承条件についても図-3のモデル

の場合と全く同じである。

##### (2) 荷重条件

荷重条件および変位 $u$ 、 $v$ 、 $w$ のとり方は図-3の場合と同じである。

##### (3) 曲げ荷重とねじり荷重による鉛直変位

考え方は2.(3)と同じであり、 $v_m$ と $v_t$ についてもそのまま適用する。

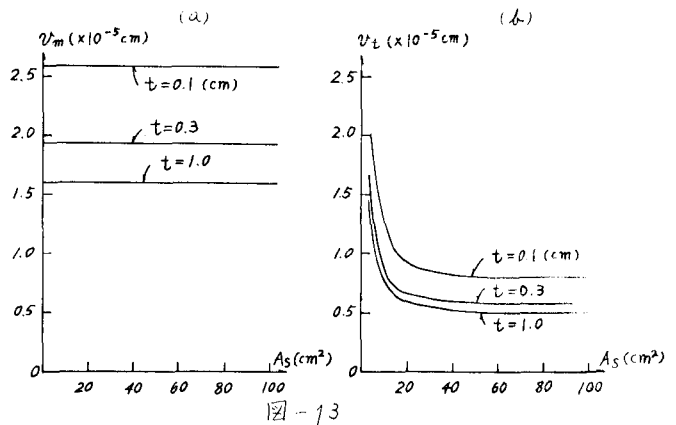
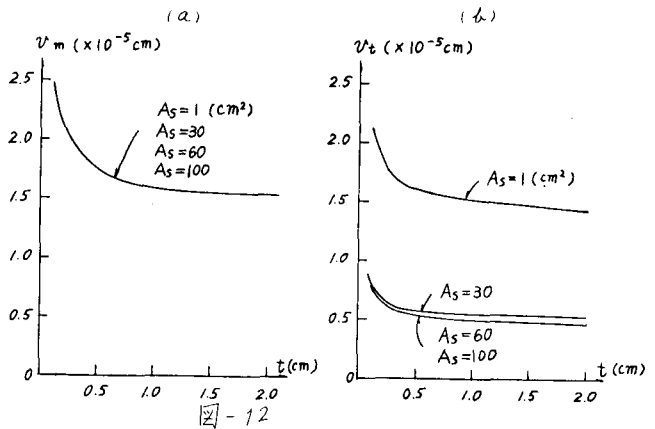
対傾構断面積を一定としたときの曲げに関するたわみ $v_m$ と、上横構部材と置換したシャイブの板厚 $t$ との関係、またねじりに関するたわみ $v_t$ と $t$ との関係をそれぞれグラフにしたものが図-12(a)、(b)である。

次に板厚 $t$ を一定にしたときの対傾構断面積 $A_s$ と $v_m$ との関係、また $A_s$ と $v_t$ との関係をそれぞれグラフにしたものが図-13(a)、(b)である。

ただしこの場合においては、3.(3)と同じように、ねじり荷重ではなく、上弦材上の節点(1)へ(7)にのみ $P=1$ の鉛直荷重を作用させる。

##### (4) そり変位について

図-4に示したねじり荷重を作用させることにより、板トラス立体構造においてもやはり図-8に示したようなそり変位を生ずる。そこで3.(4)の場合と同じように節点(2)におけるそり変位 $w_2$ に着目して、対傾構断面積 $A_s$ を一定としたときの $w_2$ とシャイブの板厚 $t$ との関係、また板厚 $t$ を一定としたときの $A_s$ と $w_2$ と



の関係それぞれグラフにしたものが図-14 (a), (b)である。

(5) ねじれ角 $\varphi$ とずれ角 $\theta$ について  
図-3に示したねじり荷重をかけることにより、この板・トラス立体構造の横断面内でも、やはり図-10に示したようなねじり角 $\varphi$ とずれ角 $\theta$ を生ずる。そしてやはり近似的には式(4)がこの場合にも当てはまるものとして、図-10に示してあるようにしてねじり角 $\varphi$ とずれ角 $\theta$ とを算定する。

そして対傾構断面積 $A_s$ を一定としておいたときのシャイベの板厚 $t$ と $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $(\varphi + \theta)$ との関係を、また板厚 $t$ を一定としておいたときの $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $(\varphi + \theta)$ との関係を、それぞれグラフにしたものが図-15 (a), (b)である。ただしこの場合に用いた板・トラス立体構造の横断面も節点 (1), (15) (25), (11) より成る支間中央断面である。また作用している等節点鉛直荷重は2. (5)と同じく $P = 10000 \text{ kg}$ である。

## 5. 横構の換算板厚

同一の載荷状態において、図-1 (a)の変形と図-1 (b)の変形とをくらべた結果、もしも両者の変形が等しかったとすれば、図-1 (a)の上横構は図-1 (b)のシャイベに置換されたものと考えることができる。このときのシャイベの板厚 $t$ を横構の換算板厚と呼ぶことにする。当然ながら、上横構断面積 $A_L$ が大きくなれば、換算板厚 $t$ も大きくなろう。いまの場合変形としては、曲げ荷重による鉛直たわみ $v_m$ , ねじり荷重による鉛直たわみ $v_t$ , ねじり荷重によるそり変位 $w$ , ねじり荷重による $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $(\varphi + \theta)$ などがあり、それぞれに対して換算板厚が求まり

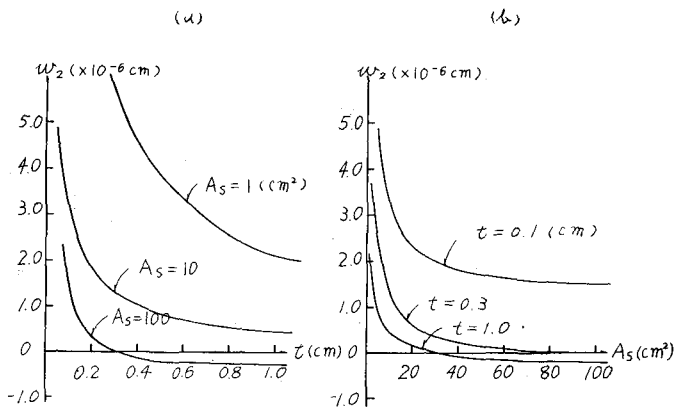


図-14

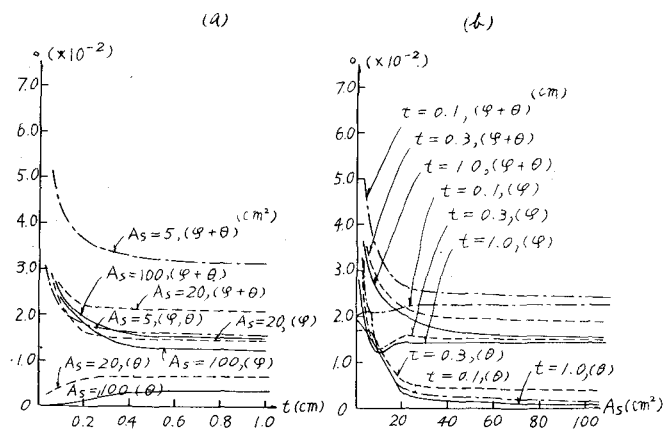


図-15

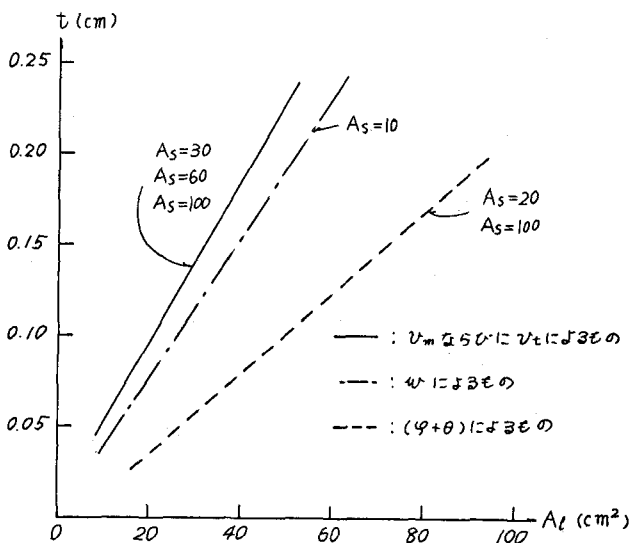


図-16

その結果を示すと図-16のとおりである。

#### 6. 考察とあとなき

図-1(a)および図-1(b)のような立体トラスにおいて 図-3のような支承条件の場合、曲げ荷重およびねじり荷重を載荷したときの構造特性は次のとおりである。

- (イ) 図-5のように、上弦材の片側のみに鉛直荷重を載荷したときの鉛直変位は、曲げとねじりが合成されたものであるが、式(3)を用いれば、曲げ荷重のみによる鉛直変位  $v_m$  とねじり荷重のみによる鉛直変位  $v_e$  とに分離できる。
- (ロ) 横構断面面積  $A_e$  を増加すると  $v_m$  は減少する。
- (ハ) 対傾構断面面積  $A_s$  を増加すると  $v_e$  は急激に減少し、この場合  $A_s = 40 \text{ cm}^2$  位以上になると  $A_s$  をいくら大きくしても  $v_e$  はほとんど一定値となる。
- (ニ) 図-4のようなねじり荷重を載荷したとき、 $A_s$  および  $A_e$  を増加するとそり変位  $w$  は急激に減少し、この場合  $A_e = 60 \text{ cm}^2$  位以上、 $A_s = 40 \text{ cm}^2$  位以上になると  $A_e$  および  $A_s$  をいくら大きくしても  $w$  はほとんど一定値となる。
- (ホ) 図-4のようなねじり荷重を載荷したとき、ねじり角を  $\varphi$ 、ずれ角を  $\theta$  とすると、 $A_s$  を増加すると、 $(\varphi + \theta)$  は急激に減少し、この場合  $A_s = 40 \text{ cm}^2$  位以上になると  $A_s$  をいくら大きくしても  $(\varphi + \theta)$  は、ほとんど一定値となる。  
なお、 $A_s$  の増加は  $\theta$  の減少に特に役立つ。
- (ヘ) 図-4のようなねじり荷重を載荷したとき、 $A_e$  を増加すると  $(\varphi + \theta)$  は急激に減少し、この場合  $A_e = 60 \text{ cm}^2$  位以上になると  $A_e$  をいくら大きくしても  $(\varphi + \theta)$  はほとんど一定値となる。  
なお、 $A_e$  の増加は  $\varphi$  の減少に特に役立つ。
- (ト) 横構換算板厚  $t$  と  $A_e$  との関係図は図-17のとおりであった。

なお計算は北海道大学大型電子計算機センターFACOM 230-60によった。