非軸対称荷重を受ける有限円柱の解について

北見工業大学　正員　奥村　勇

1. 緒言

非軸対称荷重を受ける有限円柱の3次元弾性問題の解としては，秦 謹一の解（1955年）が先駆的である。秦はH. Neuberの解に第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Theta}$ を附加した一般化されたH. Neuberの解よりその解を誘導しておられる。[1]

最近，能町純雄・松岡健一等は非軸対称荷重を受けた有限円筒の3次元応力問題をFourier－Hankel変換を用いて巧みに解いておられる。[2]

筆者は一般化されたH. Neuberの解より出発して，その特別な場合として軸対称問題の解が得られるような形で有限円柱の非軸対称3次元弾性問題の解を得たので報告する。

2. 釣合方程式とその解

変位ベクトル$\mathbf{u}$で表わした弾性体の釣合方程式は次式である。

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \qquad (1) \qquad \nu:\text{ポアソン比}$$

式(1)の変位ベクトル$\mathbf{u}$を次のように置く。

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \mathrm{grad}\,\chi \quad (2),\quad \text{ただし}\quad \nabla^2\mathbf{B} = 0 \quad (2')$$

式(2)を式(1)に代入すると次式を得る。

$$\nabla^2\chi = -\frac{1}{2(1-\nu)}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} \qquad (3)$$

上式を積分して

$$\chi = -\frac{1}{4(1-\nu)}\,(B_0 + \mathbf{R}\mathbf{B}) \quad (4),\quad \text{ただし}\quad \nabla^2 B_0 = 0 \quad (4')$$

式(4)を式(2)に代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\nu)}\,\mathrm{grad}\,(B_0 + \mathbf{R}\mathbf{B}) \qquad (5)$$

上式はP.F. Papkovichの解（1932年）である。いま，上式で

$$\mathbf{B} = 2(1-\nu)\boldsymbol{\Phi}/G,\quad B_0 = 2(1-\nu)\Phi_0/G \qquad G:\text{せん断弾性係数}$$

と置くと，式(5)は次のように変形できる。

$$2G\mathbf{u} = -\mathrm{grad}\,F + 4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi} \quad (6) \quad \text{ただし}\quad F = \Phi_0 + \mathbf{R}\boldsymbol{\Phi} \quad (6')$$

上式はH. Neuberの解（1934年）である。

さて，式(2)の調和ベクトル$\mathbf{B}$の中より，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Theta}$型の調和ベクトルを最初から分離して

$$2G\mathbf{B} = 4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Theta}\ {}^{3)} \quad (7) \quad \text{ただし}\quad \nabla^2\boldsymbol{\Phi} = 0,\ \nabla^2\boldsymbol{\Theta} = 0 \quad (7')$$

と置くと，式(3)は

$$2G\nabla^2\chi = -2\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} \qquad (8)$$

となる。したがって

$$2G\chi = -(\Phi_0 + \mathbf{R}\boldsymbol{\Phi}) \quad (9) \quad \text{ただし}\quad \nabla^2\Phi_0 = 0 \quad (9')$$

式(2)，(7)および式(9)より

$$2G\mathbf{u} = -\mathrm{grad}\,F + 4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Theta} \qquad (10)$$

ただし　$F=\Phi_0+R\Phi$　(10.a)　$\nabla^2\Phi_0=0$, $\nabla^2\Phi=0$, $\nabla^2\Theta=0$　(10.b)

$\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, $\Theta=(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$　(10.c)

が導出される。式(10)はH. Neuberの解に第3項2rot Θを附加したものであり，H. Neuberの解の拡張と考えられる。

式(10)を秦は拡張されたH. Neuberの解あるいは一般化されたH. Neuberの解と呼んでおられる。非軸対称弾性問題では，この第3項2rot Θが必要と思われる。

3. 一般化されたH. Neuberの解の調和ベクトルの決定

式(10)のΦ_0および調和ベクトルΦ, Θを求める。式(10.b)をスカラーで表わすと次のようである。

$\nabla^2\Phi_0=0$　(11)　$\nabla^2\Phi_3=0$　(12)　$\nabla^2\vartheta_3=0$　(13)

$$\nabla^2\Phi_1-\frac{\Phi_1}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}=0,\quad \nabla^2\Phi_2-\frac{\Phi_2}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}=0 \qquad (14)$$

$$\nabla^2\vartheta_1-\frac{\vartheta_1}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\theta}=0,\quad \nabla^2\vartheta_2-\frac{\vartheta_2}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\theta}=0 \qquad (15)$$

ここで

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(14)および式(15)に示されているように，Φ_1, Φ_2, ϑ_1およびϑ_2が調和関数にならないことは注意を要する。

式(11)から式(15)を解き，結果のみを示すと次のようである。

$$\Phi_{03}=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(A_{ms}\cosh\alpha_{ms}z+A'_{ms}\sinh\alpha_{ms}z)J_m(\alpha_{ms}r)\cos m\theta \qquad (16.a)$$

$$\Phi_3=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(C_{ms}\sinh\alpha_{ms}z+C'_{ms}\cosh\alpha_{ms}z)J_m(\alpha_{ms}r)\cos m\theta \qquad (16.b)$$

$$\vartheta_3=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(B_{ms}\cosh\alpha_{ms}z+B'_{ms}\sinh\alpha_{ms}z)J_m(\alpha_{ms}r)\sin m\theta \qquad (16.c)$$

$$\Phi_{01}=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{mn}I_m(\beta_n r)\cos m\theta\cos\beta_n z \quad (17.a) \qquad \Phi_{02}=0 \quad (17.b)$$

$$\Phi_1=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}I'_m(\beta_n r)\cos m\theta\cos\beta_n z \quad (17.c) \qquad \Phi_2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}\frac{m}{r}I_m(\beta_n r)\sin m\theta\cos\beta_n z \quad (17.d)$$

$$\vartheta_1=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}I'_m(\beta_n r)\sin m\theta\sin\beta_n z \quad (17.e) \qquad \vartheta_2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}\frac{m}{r}I_m(\beta_n r)\cos m\theta\sin\beta_n z \quad (17.f)$$

ただし，$m=0, 1, 2, \cdots$, $n, s=1, 2, 3, \cdots$, $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq r\leqq a$,　a：円柱の半径

式(16)および式(17)で$m=0$と置き，prime suffixのついた未知定数をはずすと有限円柱の軸対称問題の解が得られる。

上記の諸式で$J_m(\alpha_{ms}r)$はm次Bessel関数，$I_m(\beta_n r)$はm次第1種の変形されたBessel関数である。また，α_{ms}, β_nは境界条件により定まる固有値である。

4. 変位および応力の表現式

式(10)，(16)および式(17)から変位が求められる。式(16)から得られる変位に(1)，式(17)から得られる変位に(2)のsuperscriptを付して示すと次のようである。

$$\begin{aligned}2Gu_r^{(1)}=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m-1}(\alpha_{ms}r)\cos m\theta\left(\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{(A_{ms}+2B_{ms})\cosh\alpha_{ms}z+(A'_{ms}+2B'_{ms})\sinh\alpha_{ms}z+\\&+C_{ms}z\sinh\alpha_{ms}z+C'_{ms}z\cosh\alpha_{ms}z\}+\\&+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m+1}(\alpha_{ms}r)\cos m\theta\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{(A_{ms}-2B_{ms})\cosh\alpha_{ms}z+(A'_{ms}-2B'_{ms})\sinh\alpha_{ms}z+\\&+C_{ms}z\sinh\alpha_{ms}z+C'_{ms}z\cosh\alpha_{ms}z\}\end{aligned} \qquad (18)$$

$$
\begin{aligned}
2G u_\theta^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m-1}(\alpha_{ms} r)\sin m\theta \left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{ (A_{ms} + 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} + 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{m} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m+1}(\alpha_{ms} r)\sin m\theta \left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{ (A_{ms} - 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} - 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2G u_z^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m}(\alpha_{ms} r)\cos m\theta \left[\{\alpha_{ms} A_{ms} - (3-4\nu) C_{ms}\}\sinh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms} A'_{ms} - (3-4\nu) C'_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + \right. \\
& \left. + C_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \right] \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2G u_r^{(2)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left(\frac{\beta_n}{2}\right)\left[\{ D_{mn} - 2\beta_n E_{mn} + (m-4+4\nu) F_{mn} \} I_{m-1}(\beta_n r) + \{ D_{mn} + 2\beta_n E_{mn} - \right. \\
& \left. - (m+4-4\nu) F_{mn} \} I_{m+1}(\beta_n r) + 2F_{mn}\beta_n r I_m(\beta_n r) \right] \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2G u_\theta^{(2)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos \beta_n z \left(-\frac{\beta_n}{2}\right)\left[\{ D_{mn} - 2\beta_n E_{mn} + (m-4+4\nu) F_{mn} \} I_{m-1}(\beta_n r) - \{ D_{mn} + 2\beta_n E_{mn} - \right. \\
& \left. - (m+4-4\nu) F_{mn} \} I_{m+1}(\beta_n r) \right] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
2G u_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \sin \beta_n z \left(-\frac{\beta_n}{2}\right)\{ 2D_{mn} I_m(\beta_n r) + F_{mn}(\beta_n r I_{m-1}(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r)) \} \qquad (23)
$$

応力は変位と応力の関係式から求められる。変位と同じように *superscript* を付して示すと次の様である。

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m-2}(\alpha_{ms} r)\left(\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} + 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} + 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m+2}(\alpha_{ms} r)\left(\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} - 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} - 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{ (\alpha_{ms} A_{ms} + 4\nu C_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (\alpha_{ms} A'_{ms} + 4\nu C'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_\theta^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m-2}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} + 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} + 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m+2}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} - 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} - 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\{ (\alpha_{ms} A_{ms} + 4\nu C_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (\alpha_{ms} A'_{ms} + 4\nu C'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m}(\alpha_{ms} r)(\alpha_{ms})\left[\{\alpha_{ms} A_{ms} - 2(1-\nu) C_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms} A'_{ms} - 2(1-\nu) C'_{ms}\} \times \right. \\
& \left. \times \sinh \alpha_{ms} z + C_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \right] \qquad (26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m-1}(\alpha_{ms} r)\left(\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\left[\{\alpha_{ms} A_{ms} + \alpha_{ms} B_{ms} - (1-2\nu) C_{ms}\}\sinh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms} A'_{ms} + \alpha_{ms} B'_{ms} - \right. \\
& \left. - (1-2\nu) C'_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + C_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \right] + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_{m+1}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\left[\{\alpha_{ms} A_{ms} - \alpha_{ms} B_{ms} - (1-2\nu) C_{ms}\}\sinh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms} A'_{ms} - \alpha_{ms} B'_{ms} - \right. \\
& \left. - (1-2\nu) C'_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + C_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \right] \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{r\theta}^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_{m-2}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} + 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} + 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_{m+2}(\alpha_{ms} r)\left(\frac{\alpha_{ms}^2}{4}\right)\{ (A_{ms} - 2B_{ms})\cosh \alpha_{ms} z + (A'_{ms} - 2B'_{ms})\sinh \alpha_{ms} z + \\
& + C_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z + C'_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z \} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\theta z}^{(1)} = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_{m-1}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\left[\{\alpha_{ms}(A_{ms} + B_{ms}) - (1-2\nu) C_{ms}\}\sinh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms}(A'_{ms} + B'_{ms}) - \right. \\
& \left. - (1-2\nu) C'_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + C_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \right] + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_{m+1}(\alpha_{ms} r)\left(-\frac{\alpha_{ms}}{2}\right)\left[\{\alpha_{ms}(A_{ms} - B_{ms}) - (1-2\nu) C_{ms}\}\sinh \alpha_{ms} z + \{\alpha_{ms}(A'_{ms} - B'_{ms}) - \right. \\
& \left. - (1-2\nu) C'_{ms}\}\cosh \alpha_{ms} z + C_{ms}\alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z + C'_{ms}\alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z \right] \qquad (29)
\end{aligned}
$$

$$\sigma_r^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left(\frac{\beta_n^2}{4}\right)\Big[\{D_{mn} + (m-4+4\nu)F_{mn} - 2\beta_n E_{mn}\} I_{m-2}(\beta_n r) + \{D_{mn} - (m+4-4\nu)F_{mn} + 2\beta_n E_{mn}\} I_{m+2}(\beta_n r) + 2(D_{mn} - 2F_{mn}) I_m(\beta_n r) + 2F_{mn}(\beta_n r I_{m-1}(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r))\Big] \quad (30)$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left(-\frac{\beta_n^2}{4}\right)\Big[\{D_{mn} + (m-4+4\nu)F_{mn} - 2\beta_n E_{mn}\} I_{m-2}(\beta_n r) + \{D_{mn} - (m+4-4\nu)F_{mn} + 2\beta_n E_{mn}\} I_{m+2}(\beta_n r) - 2(D_{mn} - 2F_{mn}) I_m(\beta_n r)\Big\} \quad (31)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left(-\frac{\beta_n^2}{2}\right)\Big[(2D_{mn} + 4\nu F_{mn}) I_m(\beta_n r) + F_{mn}(\beta_n r I_{m-1}(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r))\Big\} \quad (32)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \sin \beta_n z \left(-\frac{\beta_n^2}{2}\right)\Big[\{D_{mn} + (m-2+2\nu)F_{mn} - \beta_n E_{mn}\} I_{m-1}(\beta_n r) + \{D_{mn} - (m+2-2\nu)F_{mn} + \beta_n E_{mn}\} I_{m+1}(\beta_n r) + 2F_{mn}\beta_n r I_m(\beta_n r)\Big] \quad (33)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cos \beta_n z \left(-\frac{\beta_n^2}{4}\right)\Big[\{D_{mn} + (m-4+4\nu)F_{mn} - 2\beta_n E_{mn}\} I_{m-2}(\beta_n r) - \{D_{mn} - (m+4-4\nu)F_{mn} + 2\beta_n E_{mn}\} I_{m+2}(\beta_n r) + 2m F_{mn} I_m(\beta_n r)\Big] \quad (34)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \sin \beta_n z \left(\frac{\beta_n^2}{2}\right)\Big[\{D_{mn} + (m-2+2\nu)F_{mn} - \beta_n E_{mn}\} I_{m-1}(\beta_n r) - \{D_{mn} - (m+2-2\nu)F_{mn} + \beta_n E_{mn}\} I_{m+1}(\beta_n r)\Big] \quad (35)$$

superscript (1) と (2) を付した変位および応力を各々加えたものが求める変位および応力の表現式である。

式 (21) から式 (35) までの諸式で $m=0$ と置き，*prime suffix* を付した未知定数をはずすと，軸対称問題の変位および応力の表現式が得られる。

5. 結　語

一般化された H. Neuber の解より，有限円柱が非軸対称荷重を受けた場合の解を求めた。しかしながら，ここで述べた解は基本解である。

問題の境界条件あるいは荷重条件によってはこの基本解の他に更に別の解が必要となることがある。例えば，*superscript* (1) を付した応力の表現式を Fourier 級数に展開する必要が生じた場合，その際，$n=0$ の項が生ずるようであればそれに対応して，*superscript* (2) を付した応力の表現式で $n=0$ の場合の解が必要となる。

また，円柱の表面に作用する荷重を Fourier－Bessel 級数に展開した際，定数項が生ずるようであれば，それを処理するために別の簡単な解が必要となる。

式 (11) から式 (15) を解いて調和ベクトルの成分を決定する際に生ずる未知定数（積分定数）の個数については注意を要する。本論では，応力状態が $z=0$ に関して対称とならない場合を取扱っているので，9個の未知定数が必要となる。

式 (14) を解いて Φ_1，Φ_2 および式 (15) を解いて ϑ_1，ϑ_2 を求めるのであるが，その場合に，Φ_1，Φ_2 および ϑ_1，ϑ_2 にはそれぞれ2個の未知定数が残るように見掛上思われるが，Φ_{01} との関数の独立性を考慮に入れると1個のみの未知定数が有効となり，式 (17·c) から式 (17·f) までに示した結果が得られる。

参考文献

1) 秦 謹一　「三次元応力問題の解法について」 北海道大学工学部研究報告，第13号，pp. 39～42，（昭和30年12月）

2) 能町純雄・松岡健一　「円筒座標に関する非軸対称三次元応力解析について」 土木学会第27回年次学術講演会，第1部，pp. 127～130，（昭和47年10月）

3) 秦 謹一　*ibid.* p19