

無限体中の円孔に円形載荷されにときの三次元応力解析

北海道大学 正員 能町純雄
室蘭工業大学 同 松岡健一

1. まえがき 我々は、先に、無限体中の円孔に方形に部分分布荷重が載荷するときの三次元応力解析を行なった。⁽¹⁾ 本論では、これを円形に部分載荷された場合に適用したものである。円形載荷の場合は、方形載荷と異なり、境界条件のフーリエ変換が複雑とけるが、等分布の場合は、単一種ベッセル函数に展開できた。この種の問題は、トンネル内での載荷試験等に適用可能であるが、この場合、円形載荷となることが多いので、ここでとりあげた。解析するは、計算を簡単にするため、部分荷重は、無限体中の円孔に等間隔に作用するものとした。問題は荷重近くの応力および変位であるから、この仮定によっても、荷重間隔を大きくとれば、十分正確な解析を行なうことができる。

2. 変位の一般式 この問題は、非軸対称三次元応力問題であるが、この一般解はすでに発表しているの^(2,3)で、ここでは、結果のみを示す。図-1に示すように、半径方向には無限であり、円孔方向には、荷重が等間隔に作用していると仮定するので、座標軸を、円孔中心に z 、半径方向に r 、円周方向に θ とし、それぞれの変位を、 w, u, v 、応力を、 $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{\theta r}$ とすれば、

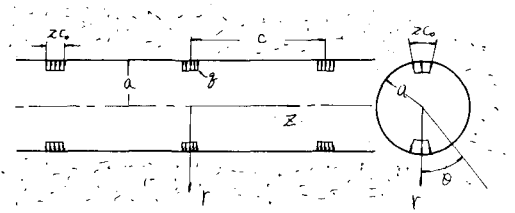


図-1

$$z = c \text{ および } z = -c \text{ で, } w = \tau_{\theta z} = \tau_{\theta r} = 0$$

となるので、この場合の変位の一般式は、半径方向変位 u は、

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\pi c} \left\{ \frac{1}{2\mu + \lambda} \beta_{00} + \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} A_{00} \right\} f_0(r) + \frac{1}{\pi c} \sum_n \cos n\theta \left[\frac{1}{\mu N} \left\{ \chi_n(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2(2\mu + \lambda)} \omega_1(Nr) \right\} \beta_{0n} + \frac{1}{N} \left\{ 2\chi_1(Nr) \right. \right. \\ & - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \omega_1(Nr) \left. \right\} A_{0n} + \left\{ \chi_1(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \omega_1(Nr) \right\} E_{0n} \left. \right] + \frac{1}{\pi c} \sum_{\theta} \cos \theta \left[r^{-\mu} C_{1\theta} + r^{\mu-1} C_{2\theta} \right. \\ & + \frac{1}{2\mu} \left\{ f_{2n}(r) - f_{2-1}(r) \right\} A_{20} + \frac{1}{2(2\mu + \lambda)} \left\{ f_{2+1}(r) + f_{2-1}(r) \right\} \beta_{20} + (2+1) \left\{ \frac{3\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} f_{2n}(r) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} f_{2-1}(r) \right\} A_{20} \\ & + (2-1) \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} f_{2+1}(r) - \frac{3\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} f_{2-1}(r) \right\} B_{20} \left. \right] \\ & + \frac{2}{\pi c} \sum_n \sum_{\theta} \cos \theta \cos n\theta \left[-\frac{1}{\mu N} \frac{t}{Nr} Q_t(Nr) \alpha_{tn} + \frac{1}{2\mu N} \left\{ \chi_{t+1}(Nr) + \chi_{t-1}(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2(2\mu + \lambda)} (\omega_{t+1}(Nr) \right. \right. \\ & - \omega_{t-1}(Nr)) \left. \right\} \beta_{tn} + \frac{t+1}{N} \left\{ 2\chi_{t+1}(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2(2\mu + \lambda)} (\omega_{t+1}(Nr) + \omega_{t-1}(Nr)) \right\} A_{tn} - \frac{t-1}{N} \left\{ 2\chi_{t-1}(Nr) \right. \\ & - \frac{\mu + \lambda}{2(2\mu + \lambda)} (\omega_{t+1}(Nr) + \omega_{t-1}(Nr)) \left. \right\} B_{tn} + \frac{1}{2} \left\{ \chi_{t+1}(Nr) + \chi_{t-1}(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\omega_{t+1}(Nr) + \omega_{t-1}(Nr)) \right\} E_{tn} \left. \right] \\ & \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

また、円周方向変位および軸方向変位 w については、

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{\pi C} \sum_z \sin z \theta \left[r^{-(\mu+1)} C_{1z} - r^{\mu-1} C_{2z} + \frac{1}{2\mu} \{ f_{z+1}(r) + f_{z-1}(r) \} \alpha_{z0} + \frac{1}{2(2\mu+\lambda)} \{ f_{z+1}(r) + f_{z-1}(r) \} \beta_{z0} \right. \\
& + (z+1) \left\{ \frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} f_{z+1}(r) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} f_{z-1}(r) \right\} A_{z0} + (z-1) \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} f_{z+1}(r) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} f_{z-1}(r) \right\} B_{z0} \left. \right] \\
& + \frac{z}{\pi C} \sum_n \sum_z \sin z \theta \cdot \cos n z \left[\frac{1}{2\mu N} \{ \chi_{z+n}(Nr) + \chi_{z-n}(Nr) \} \alpha_{zn} + \frac{1}{2\mu N} \{ \chi_{z+n}(Nr) - \chi_{z-n}(Nr) \} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} \right. \\
& \times (\omega_{z+n}(Nr) - \omega_{z-n}(Nr)) \left. \right\} \beta_{zn} + \frac{z+1}{N} \left\{ 2\chi_{z+n}(Nr) - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} (\omega_{z+n}(Nr) - \omega_{z-n}(Nr)) \right\} A_{zn} \\
& + \frac{z-1}{N} \left\{ 2\chi_{z-n}(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} (\omega_{z+n}(Nr) - \omega_{z-n}(Nr)) \right\} B_{zn} + \frac{1}{2} \left\{ \chi_{z+n}(Nr) - \chi_{z-n}(Nr) - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} (\omega_{z+n}(Nr) \right. \\
& \left. - \omega_{z-n}(Nr)) \right\} E_{zn} \left. \right] \dots \dots \dots (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{z}{\pi C} \sum_n \sum_z \cos z \theta \cdot \sin n z \left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{1}{N} F_z(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{zn} + (z+1) A_{zn} - (z-1) B_{zn} \right\} + \{ G_z(Nr) \right. \\
& \left. + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F_z(Nr) \right\} E_{zn} \left. \right] \\
& + \frac{1}{\pi C} \sum_n \sin n z \left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{1}{N} F_0(Nr) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{0n} + A_{0n} \right\} + \{ G_0(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F_0(Nr) \} E_{0n} \right] \dots \dots \dots (3)
\end{aligned}$$

上式中、 μ, λ は Lamé の弾性定数、 C は荷重間隔、 $N = \alpha\pi/c$ 、 $\alpha = 1, 2, \dots$ 、 $z = 1, 2, \dots$ である。また、円孔の半径を a とすれば、(1) ~ (3) 式の関数は、

$$f_{z+1}(r) = \frac{a^2}{z} r^{-(z+1)} - \frac{z}{2(z-1)} a^{z+2} r^{-(z+1)}, \quad f_{z-1}(r) = -\frac{a^2}{2(z-1)} r^{-(z-1)} \quad (z \neq 1)$$

$$G_z(Nr) = +\frac{K_z(Nr)}{K_z(Na)}, \quad \chi_{z+1}(Nr) = -\frac{K_{z+1}(Nr)}{K_z(Na)}, \quad \chi_{z-1}(Nr) = -\frac{K_{z-1}(Nr)}{K_z(Na)}$$

$$F_z(Nr) = Nr \chi_{z-1}(Nr) - Na \chi_{z-1}(Na) G_z(Nr), \quad \omega_{z-1}(Nr) = Nr G_z(Nr) - (Na \chi_{z-1}(Na) - z a) \chi_{z-1}(Nr)$$

$$\omega_{z+1}(Nr) = \omega_{z-1}(Nr) - \frac{2z}{Nr} F_z(Nr)$$

ここで、 $K_z(Nr)$ は、変形ベッセル関数である。また、(1) ~ (3) 式に含まれる $\alpha_{zn}, \beta_{zn}, A_{zn}, B_{zn}, E_{zn}$ は、境界の物理量で与えられる積分定数であり、境界条件を満足するように決定する。

3. 境界条件 (1) ~ (3) 式は、 $z=0$ および $z=c$ における条件を満足しているから、ここでは $r=a$ における条件のみを考慮すればよい。従って、

$$r=a \text{ で } \tau_{r\theta} = 0 \quad \therefore \alpha_{zn} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad \dots \dots (5)$$

$$\sigma_r = p(z, \theta) \quad \dots \dots (6)$$

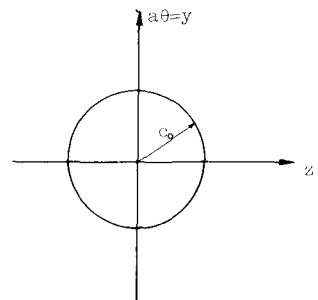


図-2

ここで、 $p(z, \theta)$ は、図-2 に示るように、円孔を平面に展開したと

ま、円形に分布しているものとする。(6)式から、 β_{tm} が求められるが、これは次のようになる。

$$\beta_{tm} = \int_0^c \int_0^{2\pi} p(z, \theta) \cos t\theta \cos Nz \, d\theta \, dz = \int_0^c \int_0^{2\pi} p(z, \frac{\theta}{a}) \cos t\theta \cos Nz \, \frac{1}{a} d\theta \, dz \quad \text{ただし } t' = \frac{t}{a}$$

$p(z, \theta)$ は図-2 のように、半径 G_0 の円に等分布しているから、 $z = x \cos \theta$, $y = x \sin \theta$ とすると

$$\beta_{tm} = \frac{z}{a} \int_A \cos(Nx \cos \theta) \cdot \cos(t'x \sin \theta) \, dx \, d\theta = \frac{z}{2a} \int_A \{ \cos(Nx \cos \theta - t'x \sin \theta) - \cos(Nx \cos \theta + t'x \sin \theta) \} \, dx \, d\theta$$

$$\therefore \int_A \cos(Nx \cos \theta - t'x \sin \theta) \, dx \, d\theta = \int_A \cos \{ x \sqrt{N^2 + t'^2} \left(\frac{N}{\sqrt{N^2 + t'^2}} \cos \theta - \frac{t'}{\sqrt{N^2 + t'^2}} \sin \theta \right) \} \, dx \, d\theta$$

$$= \int_A \cos \{ x \sqrt{N^2 + t'^2} \sin(\alpha - \theta) \} \, x \, dx \, d\theta \quad \text{ただし } \sin \alpha = \frac{N}{\sqrt{N^2 + t'^2}}$$

$$= \int_0^{G_0} \int_0^{2\pi} \cos \{ x \sqrt{N^2 + t'^2} \sin(\alpha - \theta) \} \, x \, dx \, d\theta = \int_0^{G_0} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha} \cos \{ x \sqrt{N^2 + t'^2} \sin \beta \} \, x \, dx \, d\beta = \int_0^{G_0} J_0(\sqrt{N^2 + t'^2} x) \, x \, dx$$

$$= \frac{\pi G_0}{\sqrt{N^2 + t'^2}} J_1(\sqrt{N^2 + t'^2} G_0) \quad (\because \int_0^{2\pi} \cos(\beta \sin t) \, dt = \frac{\pi}{2} J_0(\beta))$$

ただし、 $J_0(z)$, $J_1(z)$ は第1種ベッセル関数である。部分分布荷重は、図-1 のように分布していると、 β_{tm} は結局

$$\beta_{tm} = \frac{2\pi G_0}{\sqrt{N^2 + t'^2} \cdot a} \{ 1 + (-1)^n \} \{ 1 + (-1)^t \} J_1(\sqrt{N^2 + t'^2} G_0) \quad \dots \dots (7)$$

また式の節等級数から

$$\int_0^{2\pi} u_{r=a} \cos t\theta \, d\theta = \frac{z}{c} \sum_n (A_{tm} + B_{tm}) a \cos Nz, \quad \int_0^{2\pi} v_{r=a} \sin t\theta \, d\theta = \frac{z}{c} \sum_n (A_{tm} - B_{tm}) a \cos Nz \quad \dots \dots (8)$$

従ってこの場合、未知係数は、 A_{tm} , B_{tm} , E_{tm} となり、(7)式と(8)式からこれを決定する。

4. 数値計算 数値計算の結果を図-3 ~ 図-8 に示す。計算はすべて $G/a = 0.1$, ポアソン比 0.25 の場合で、級数は、 n に対して偶数のみ 50 項、 m に対して偶数のみ 12 項の和の結果である。

図-3 ~ 図-6 は、それぞれ、 σ_θ , σ_r , σ_z の分布を示したものであるが、いずれも、載荷範囲外では、急激に減少している。また、 σ_θ , σ_z については、深さの方向にも急激に減少している。これらは、内壁に軸対称荷重をうける中空円管の応力分布と、同様の傾向である。

図-7, 図-8 は、変位 u , w の分布を示す。 u の分布は、表面以外では、 σ_r の分布に似ており、 w は深さ方向に急激に減少している。

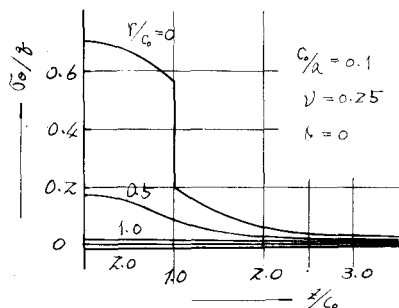


図-3 σ_θ の分布図

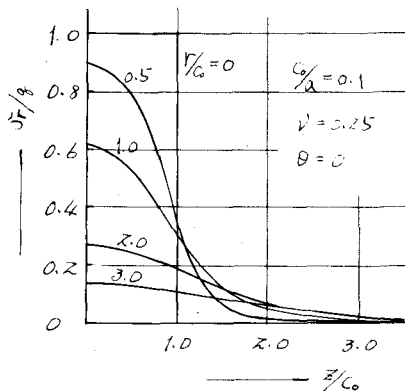


図-4 σ_r の分布図

図-9 は、表面 $r=a$ における u の分布と半無限体の表面に円形載荷したときの表面における変位の比較を示した。図中実線が半無限体の場合であるが、載荷面積が半径に比べて小さいために、載荷範囲では、あまり差はないが、範囲外ではかなりの差が認められる。

図-10 とは σ_r について同様比較を示したが、この場合はほとんど差はない。

5. おまけ

無限体中の円孔に円形載荷された場合の応力解析を行ったが、半無限体の場合と比較すると、変位つまりかなりの差が認められたが、これは、載荷範囲が小さくなるほど大きくなるものと思われる。

なお、数値計算は、北大大型計算機 FACOM 230-60 で行った。
参考文献

- 1) 能町・松岡; 土木学会全国大会概要集 p46
- 2) S. G. Nomachi; Mem. of Muroran Institute of Tech. Vol. 3 p477, p705
- 3) 能町・松岡; 土木学会第27回全国大会概要集 p127
- 4) Timoshenko, Goodier; Theory of Elasticity 2nd Ed. p366

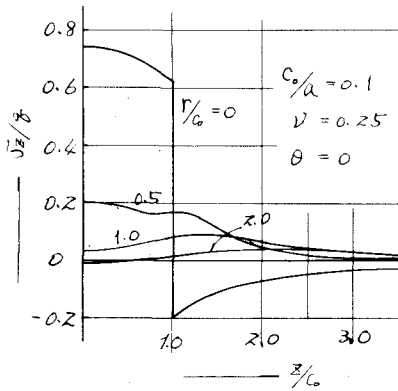


図-5 σ_z の分布図

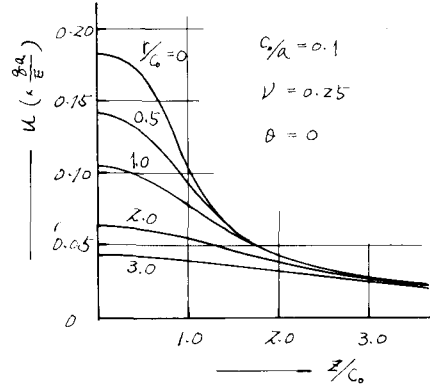


図-7 u の分布図

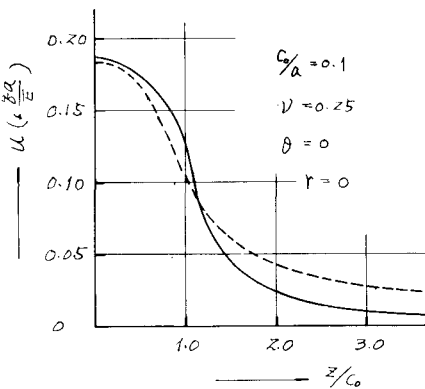


図-9 半無限体円形載荷との比較 (u について)

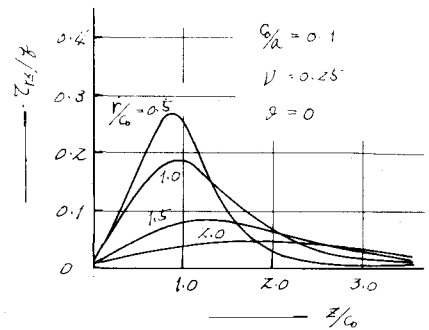


図-6 σ_r の分布図

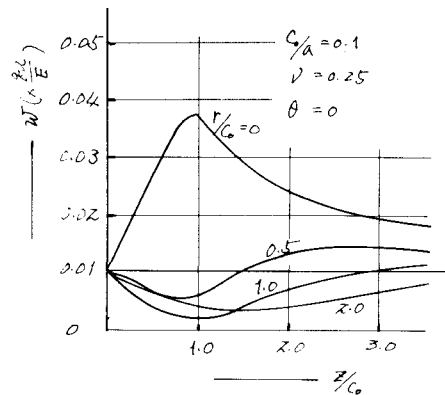


図-8 w の分布図

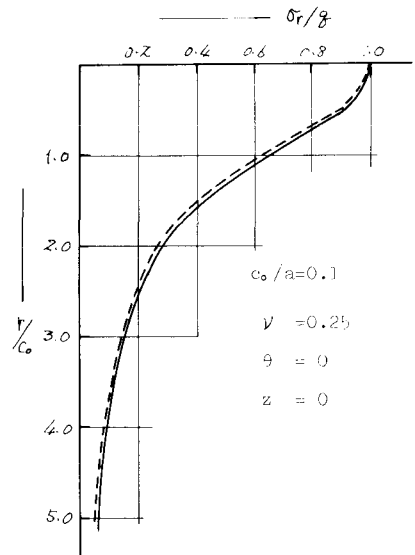


図-10 半無限体との比較 (σ_r について)