

トラス 2次応力算出方法の比較について

北海道大学 正員 能町純雄
函館ドック 新谷 勇

1 まえがき

トラス構造において1次応力と2次応力との割合は20~40%の増加をみるとあるといわれている。又その計算方法については、トラスをヒンジ節点として先づたわみを求めそれを部材回転角として2次応力をたわみ角法によって求め、マンデラ氏の方法などがあるが、本論文では長大ゲルバートラスを想定し全システムへの部材長の変化と同時に節点回転角を考えた構造として解き1次応力との差がどれ位であるかを検討したもので、和分変換公式を用いることのできる規則正しいゲルバートラスをモデルとして解析を行ったものである。

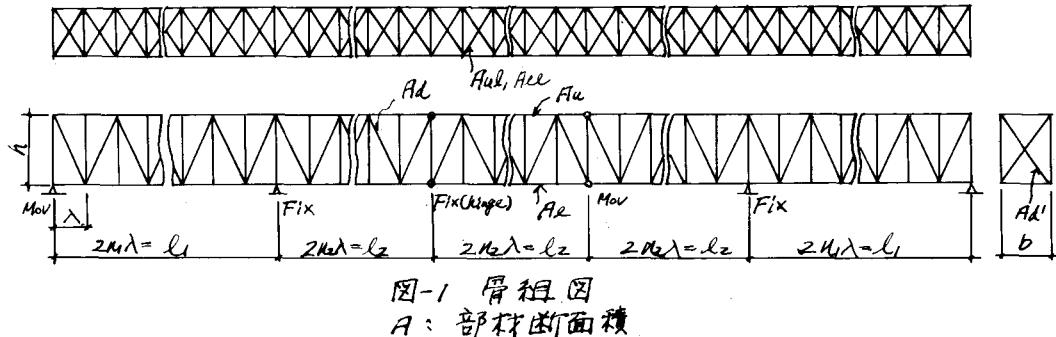


図-1 骨組図
A: 部材断面積

2 公式

フーリエ定理変換 及び逆変換公式

$$\begin{aligned} S_i[f(x)] &= \sum_{k=1}^{n-1} f(x) \sin \frac{k\pi}{n} x \\ f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} R_i[f(x)] \sin \frac{k\pi}{n} x \end{aligned} \quad \begin{aligned} C_i[f(x)] &= \sum_{k=1}^{n-1} f(x) \cos \frac{k\pi}{n} x \\ f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R_i[f(x)] \cos \frac{k\pi}{n} x \quad (x, i=0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

3 釣合方程式

いまトラスの各部材力をフックの法則で表わすと、図-2に示すような既着トラスの任意の点の水平方向、鉛直方向の釣合の差分方程式は次のようになる

(1) 各点ヒンジの場合

水平方向(橋脚方向)

$$K_2(U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{K_4 \cos \beta}{2} (U_{i+\frac{1}{2}} + U_{i-\frac{1}{2}}) + K_1 \cos \alpha (U_{i+\frac{1}{2}} + U_{i-\frac{1}{2}}) - (2K_2 + K_4 \cos^2 \beta + 2K_1 \cos \alpha) \\ \cdot U_i + \frac{K_4 \cos \beta \sin \beta}{2} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}) + K_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha (V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}}) = 0$$

水平方向(橋脚直角方向) $i \sim i'$

$$\frac{K_4 \cos \beta \sin \beta}{2} (U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{K_4 \cos \beta \sin \beta}{2} (U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}) + K_4 \cos \beta \sin^2 \beta (W_{i+\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}}) \\ - (2K_4 \cos \beta \sin \beta + K_6 \cos^2 \beta) \cdot W_i + K_6 \cos^2 \beta \cdot W_{i''} + K_6 \cos^2 \beta \sin^2 \beta \cdot V_{i'} - K_6 \cos^2 \beta \sin \beta \cdot V_i = -W_i$$

鉛直方向 $i \sim i''$

$$K_1 \cos\alpha \sin\alpha (V_{i+\frac{1}{2}} + V_{i-\frac{1}{2}}) - (2K_1 \cos\alpha \sin^2\alpha + K_6 \cos\theta \sin^2\theta) \cdot V_i + K_1 \cos\alpha \sin\alpha (U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}) + K_6 \cos\theta \sin\theta \cdot W_i'' - K_6 \cos^2\theta \sin\theta \cdot W_i + K_6 \cos\theta \sin^2\theta \cdot V_i' = -P_x$$

同様にして他の格点についても求めることができる。今 $i \sim i''$ の格点を考慮すれば 16 元の連立方程式が求まる。

上式に於いて

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{EA}{\lambda}, & K_2 &= \frac{EAu}{\lambda} \\ K_3 &= \frac{EAe}{\lambda}, & K_4 &= \frac{2EAu}{\lambda} \\ K_5 &= \frac{2EAe}{\lambda}, & K_6 &= \frac{2EAe'}{b} \end{aligned}$$

u : 橋軸方向水平変位

w : 橋軸直角方向変位

v : 鉛直方向変位

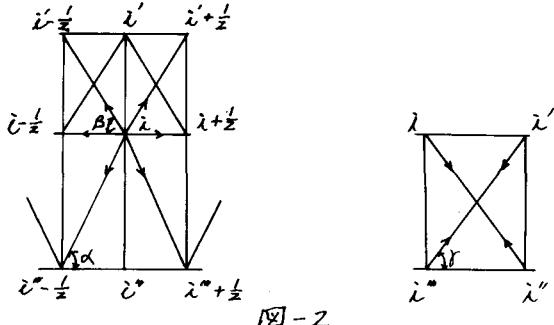


図-2

(2) 各点開結の場合

各点開結により各節点には、曲げモーメントとせん断力が生じる。従って各点の釣合式は曲げモーメントの釣合と曲げによるせん断力の影響を考慮しなければならない。

今一例として上弦材及び斜材の材端モーメントをたわみ角法公式で表わすと次のようになる。

$$M_{i, i+\frac{1}{2}} = 2EB_1 \left\{ 2\theta_i + \theta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{3}{\lambda} (V_{i+\frac{1}{2}} - V_i) \right\}$$

$$M_{i, i''-\frac{1}{2}} = 2EB_3 \left[2\theta_i + \theta_{i''-\frac{1}{2}} - \frac{3\cos\alpha}{\lambda} \left\{ (V_i - V_{i''-\frac{1}{2}}) \cos\alpha + (U_i - U_{i''-\frac{1}{2}}) \sin\alpha \right\} \right]$$

$$M_{i, i''+\frac{1}{2}} = 2EB_3 \left[2\theta_i + \theta_{i''+\frac{1}{2}} - \frac{3\cos\alpha}{\lambda} \left\{ (V_{i''+\frac{1}{2}} - V_i) \cos\alpha + (U_{i''+\frac{1}{2}} - U_i) \sin\alpha \right\} \right]$$

又 曲げによるせん断力

$$S_{i, i+\frac{1}{2}} = -\frac{M_{i, i+\frac{1}{2}} + M_{i''-\frac{1}{2}, i}}{\lambda} = -6EB_1 \left\{ \theta_i + \theta_{i+\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{(V_{i+\frac{1}{2}} - V_i)}{\lambda} \right\}$$

i 点の曲げモーメントの釣合式を示すと次のようになる。

$$(8EB_1 + 4EB_4 + 8EB_3) \cdot \theta_i + 2EB_1 (\theta_{i+\frac{1}{2}} + \theta_{i-\frac{1}{2}}) + 2EB_4 \cdot \theta_{i''} + 2EB_3 (\theta_{i''+\frac{1}{2}} + \theta_{i''-\frac{1}{2}}) - \left(\frac{6EB_1}{\lambda} + \frac{6EB_3 \cos^2\alpha}{\lambda} \right) \cdot (V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}}) - \left(\frac{6EB_4}{\lambda} + \frac{12EB_3 \cos\alpha \sin\alpha}{\lambda} \right) \cdot U_i + \frac{6EB_4}{\lambda} \cdot U_{i''} + \frac{6EB_3 \cos\alpha \sin\alpha}{\lambda} (U_{i''+\frac{1}{2}} + U_{i''-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\text{ただし } B_1 = \frac{I_1}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{I_2}{\lambda}, \quad B_3 = \frac{I_3 \cos\alpha}{\lambda}, \quad B_4 = \frac{I_4}{\lambda}$$

I : 部材断面 2 次モーメント

他の格点についても同様に求めることができる。

上記釣合の差分方程式にフーリエ変換を施し、端支承の境界条件を導入すると各方向トラスのマトリックスを得る。

対称荷重の場合について示すと次の様になる。

接着及び張出トラス（格架ヒンジ）

$$\left[\begin{array}{cccccc} -(2K_2 + K_4 \cos^3 \beta) & 0 & (2K_2 + K_4 \cos^3 \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times \cos \frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 & 0 & \widetilde{U_{i+\frac{1}{2}}} \\ -(2K_3 + K_5 \cos^3 \beta) & 2K_1 \cos^3 \alpha & (2K_3 + K_5 \cos^3 \beta) & 0 & -2K_1 \cos \alpha \sin \frac{i\pi}{2n} & 0 \\ 2K_1 \cos^3 \alpha & \times \cos \frac{i\pi}{2n} & \times \cos \frac{i\pi}{2n} & 0 & \times \sin \frac{i\pi}{2n} & -K_1 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \cos \frac{i\pi}{2n} \\ -(2K_2 + K_4 \cos^3 \beta) & 0 & 2K_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 & \times (V_0 - (-1)^i V_n) \\ +2K_1 \cos \alpha & \times \sin \frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 & \widetilde{U_i} & H_0 - (-1)^i H_n \\ \text{対} & \widetilde{(2K_3 + K_5 \cos^3 \beta)} & 0 & 0 & \widetilde{U_{i''}} & = K_1 \cos \alpha \sin \alpha (V_0 - (-1)^i V_n) \\ \text{亦} & -2K_1 \cos \alpha \sin \alpha & 2K_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 & \widetilde{V_{i+\frac{1}{2}}} & H_0'' - (-1)^i H_n'' \\ -2K_1 \cos \alpha \sin \alpha & \times \cos \frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 & \widetilde{V_i} & -K_1 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \sin \frac{i\pi}{2n} \\ -2K_1 \cos \alpha \sin \alpha & \widetilde{-2K_1 \cos \alpha \sin \alpha} & 0 & 0 & \widetilde{V_{i''}} & \times (V_0 - (-1)^i V_n), -\widetilde{P_{i+\frac{1}{2}}} \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -K_1 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \cos \frac{i\pi}{2n} \\ \times (V_0 - (-1)^i V_n) \\ H_0 - (-1)^i H_n \\ K_1 \cos \alpha \sin \alpha (V_0 - (-1)^i V_n) \\ H_0'' - (-1)^i H_n'' \\ -K_1 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \sin \frac{i\pi}{2n} \\ \times (V_0 - (-1)^i V_n), -\widetilde{P_{i+\frac{1}{2}}} \\ -\widetilde{P_i} \end{array} \right]$$

4 連続の条件

今、外力として、鉛直荷重のみを考慮し橋脚上の鉛直変位はないものとする。連続の条件として

(a) 橋脚上における相隣り合う部材の変位は相等しい。

(b) ヒンジ部における左右の鉛直せん断力は相等しい。

(c) 橋脚上における相隣り合う部材の節点回転角は相等しい。(格架剛結の場合)。

5 計算手順

(1) 格架ヒンジの場合

(a) 連続の条件より、境界点における未知数、 H 、 V 、を求める。

(b) H 、 V を釣合方程式に代入し逆変換を施して各点の変位を求め、各部材の部材角を決定する。

(c) たわみ角法公式を用いて材端モーメントの釣合条件式を立て、これを解いて材端モーメントを求める。

(2) 格架剛結の場合

各点の変位を求める手順は、(1)と同様である。この場合は節点回転角が直接求められるから直ちに材端モーメントが求まる。

以上のように材端モーメントが決定されると、格架ヒンジと剛結の場合の2次応力の比較検討が容易にできる。

6 計算例

入力データー、 $A_1 = 0.08^2$, $A_2 = 0.167^2$, $A_3 = 0.208^2$, $A_4 = A_5 = 0.0182^2$, $A_6 = 0.02^2$
 $I_1 = 0.058^4$, $I_2 = 0.074^4$, $I_3 = 0.01^4$, $I_4 = 0.006^4$, $h = 30$, $\lambda = 14$, $b = 22$.

なお計算結果による比較検討は当日発表する予定である。

参考文献

- 1) Sumio G. Nomachi : "A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration", The Memoirs of the Muroran Inst. Tech., Vol. 5, No. 2, pp. 205~212, 1, 1966.
- 2) 朝町 : "差分方程式で表わされる不静定構造物の和変換による解法例" 土木学会北海道支部, 技術資料 23号, 1967, pp. 173~179.
- 3) 中村 : "節点剛性と変形の影響を考慮せる一般トラス橋の厳密解法とその計算方法について(第1報)" 空間工業大学研究報告, 4-1, pp. 111~125. 1962.