

トラスで補強された平板の応力解析について

—二辺自由の場合—

北海道大学 正員 能町純雄
 北見工業大学 正員 大島俊之
 室蘭工業大学 学生員 坂元伸樹

1. まえがき

薄板を主体として、それを規則正しいトラス構造によって補強した構造形式について、既に著者らは、周辺単純支持という条件のもとで、いくつかのトラス構造の場合の理論式を導びき、数値計算例を発表した。^{(1), (2), (3)} その発展段階として、クロスタイアゴナルを有するトラスが縦横に組合って薄板を補強する構造で、境界条件が、2辺自由、2辺単純支持の場合について、その解法を示し、数値計算例を報告する。

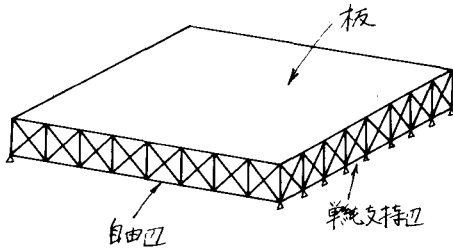


図-1 トラストプレート

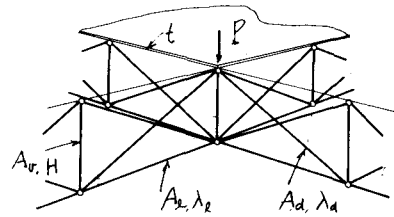


図-2 任意断面図

2. 解析方法

解析には、この種の構造物の解析に、著者らが、従来から提案している手法を用いる。すなわち、板の解析は折板理論により、面外曲げ剛性、ねじり剛性を無視しており、構造を平面要素に分割し、その要素間のつり合いの関係により、板全体の応力を解析する。その際、折板要素の長辺方向変位は短辺方向に直線変化するものと考え、平面保持の仮定を用いて、誘導された変位せん断方程式⁽⁴⁾を適用する。また、得られた変位に関する微分方程式を簡単な操作で差分化し⁽⁵⁾、差分方程式を得る。トラスの格点でのつり合いも、Hookeの法則から導かれるトラス部材力と変位の関係⁽⁶⁾から、変位に関する差分方程式で表わすことができる。得られた差分方程式に対し、Fourier変換⁽⁷⁾を行ない、境界条件を考慮して解を求める。せん断力のつり合い、トラスの格点でのつり合いは、6本の差分方程式で表わすことができる⁽⁸⁾。これをFourier変換し、境界のつり合いから得られた式を代入し、2辺自由、2辺単純支持である条件を入れて整理すれば、連立6元1次方程式となり、次のようにマトリックス表示できる。

$$K \cdot U = P$$

(1)

ここに

$$U = \begin{pmatrix} \bar{u}_{x,y} \\ \bar{u}_{x,y}^2 \\ \bar{w}_{x,y} \\ \bar{w}_{x,y}^2 \\ \bar{u}_{x,y}^2 \\ \bar{u}_{x,y}^2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_6 \end{pmatrix}$$

$k_{11} \sim k_{66}$ は、変位を Fourier 変換した値、すなわち

$$\bar{u}_{x,y} = R_m S_i[u_{x,y}], \quad \bar{u}_{x,y}^z = R_m S_i[u_{x,y}^z], \quad \bar{w}_{x,y} = S_m S_i[w_{x,y}]$$

$$\bar{w}_{x,y} = S_m S_i[w_{x,y}^z], \quad \bar{v}_{x,y} = R_i S_m[v_{x,y}], \quad \bar{v}_{x,y} = R_i S_m[v_{x,y}^z]$$

の係数 (2 はトラス下側点を示す) であり、 $\bar{P}_1 \sim \bar{P}_6$ は、境界値を含む荷重項であり、それは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_1 &= \left\{ \frac{N_x D_m}{6 \lambda_x D_m} - \frac{G t \lambda_x}{\lambda_y} \left(1 - \frac{D_m}{6} \right) \right\} \sin \frac{i \pi}{k} \{ 1 - (-1)^i \} R_m[u_{x,0}] \\ \bar{P}_2 &= 0 \\ \bar{P}_3 &= -K_x \alpha_z^2 \sin \frac{i \pi}{k} \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}^z] - S_m S_i[P_{x,y}] \\ \bar{P}_4 &= -K_x \alpha_z^2 \sin \frac{i \pi}{k} \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}] \\ \bar{P}_5 &= -K_x \alpha_z \beta_z \cos \frac{i \pi}{k} \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}] - K_x \alpha_z \beta_z \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}^z] \\ \bar{P}_6 &= K_x \alpha_z \beta_z \cos \frac{i \pi}{k} \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}^z] - \frac{G t}{2} \sin \frac{m \pi}{n} (1 + \cos \frac{i \pi}{k}) \{ 1 - (-1)^i \} R_m[u_{x,0}] \\ &\quad + K_x \alpha_z \beta_z \{ 1 - (-1)^i \} S_m[w_{x,0}] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } N_x &= E t \lambda_y, \quad K_x = E A_d y / \lambda_d y, \\ \alpha_z &= \cos \theta_y, \quad \beta_z = \sin \theta_y, \\ D_m &= 2(1 - \cos m \pi / n), \quad D_i = 2(1 - \cos i \pi / k), \\ E &= \text{ヤング係数}, \quad G = \text{せん断弾性係数}, \\ A &= \text{トラス部横断面積}, \quad \lambda = \text{トラス部桁長}, \end{aligned}$$

次に自由辺について、次式で代表される境界値方程式 4 本が得られる。

$$C_1 R_m[u_{x,0}] + C_2 S_m[w_{x,0}] + C_3 S_m[w_{x,0}^z] + C_4 R_m[u_{x,1}] + C_5 S_m[w_{x,1}] + C_6 S_m[u_{x,0}^z] + C_7 S_m[u_{x,1}^z] + C_8 S_m[v_{x,0}] + C_9 S_m[v_{x,1}] = 0 \quad (3)$$

基本式 (1) を解くと、 $u_{x,y}$, $u_{x,y}^z$, $w_{x,y}$, $w_{x,y}^z$, $v_{x,y}$ は、自由辺の境界値

$$R_m[u_{x,0}], \quad S_m[w_{x,0}], \quad S_m[w_{x,0}^z]$$

を含んだ式で表わされる。

更に、 i 方向 (y 方向) にのみ逆変換し、境界値方程式に出てくる荷重項を計算する。すなわち、 $u_{x,1}$ に着目すると、 i 方向にのみ逆変換して、

$$R_m[u_{x,1}] = d_1 + d_2 R_m[u_{x,0}] + d_3 S_m[w_{x,0}] + d_4 S_m[w_{x,0}^z] \quad (4)$$

のように表わせる。 $S_m[w_{x,1}]$, $S_m[w_{x,1}^z]$, $S_m[u_{x,0}^z]$, $S_m[u_{x,1}^z]$, $S_m[v_{x,0}]$, $S_m[v_{x,1}]$ については、同様に形を表わすことが出来る。係数 $d_1 \sim d_4$ は、 $R_m[u_{x,0}]$, $S_m[w_{x,0}]$, $S_m[w_{x,0}^z]$ などの係数を i に代入集めたもの。

式 (4) を式 (3) に代入して $R_m[u_{x,0}]$, $S_m[w_{x,0}]$, $S_m[w_{x,0}^z]$ は求められる。

これを式 (2) の境界値を含む荷重項に代入すれば、荷重項の値が求まる。

以上、求められたものを逆変換すれば、全ての点の変位が求まり、それから応力も求まる。

3. 数値計算例

以上の計算を、中央点単一集中荷重、等分布荷重の場合について、次の断面諸元で行った。その結果を示す。

ヤング係数 $= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, セン断弾性係数 $= 8.1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$,

パネル数 8×8 , 板厚 $= 0.34 \text{ cm}$, 高さ $= 10 \text{ cm}$,

格間長 $= 10 \text{ cm}$, 全スパン $= 80 \text{ cm}$,

トラス部材断面積 $= 0.2826 \text{ cm}^2$ ($\phi = 6 \text{ mm}$)

以下の数値計算の結果では、4辺単純支持の(断面諸元等しい)場合についても載せてある。

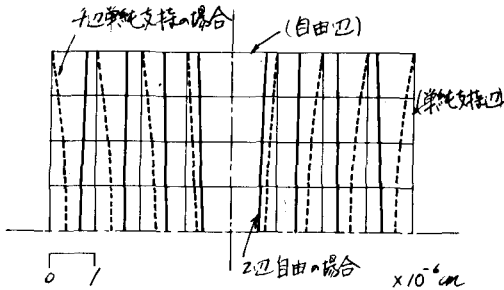


図-3 単一集中荷重(中央点)の場合の
プレート側x方向の変位 (1kg)

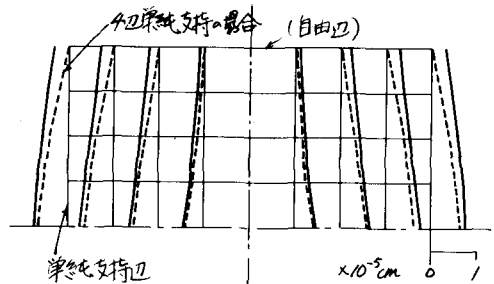


図-4 単一集中荷重(中央点)の場合の
トラス下側のy方向の変位 (1kg)

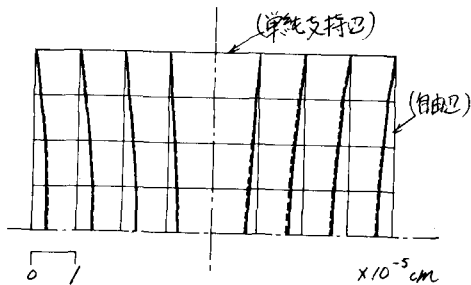


図-5 単一集中荷重(中央点)の場合
プレートy方向の変位 (1kg)

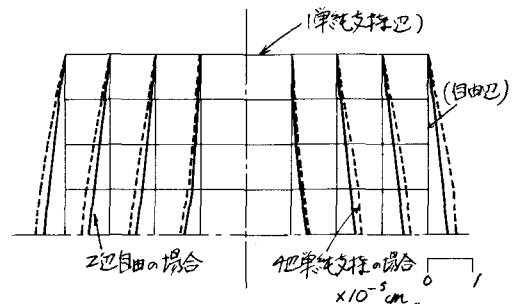


図-6 単一集中荷重(中央点)1kgの場合の
トラス下側のx方向の変位

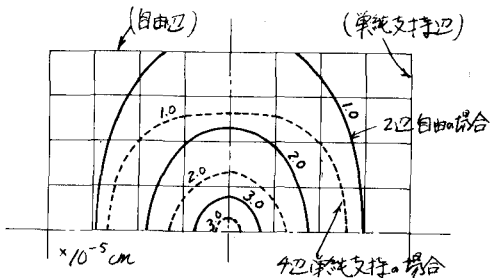


図-7 単一集中荷重(中央点1kg)の場合の
プレート側の鉛直方向の変位

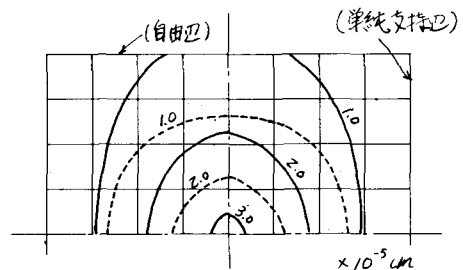


図-8 単一集中荷重(中央点1kg)の場合の
トラス下側の鉛直方向の変位

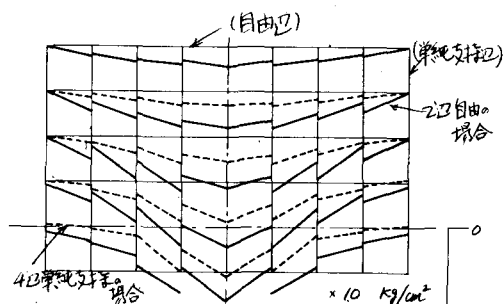


図-9 単一集中荷重(中央点) 1kg
プレート側面 x 方向の応力

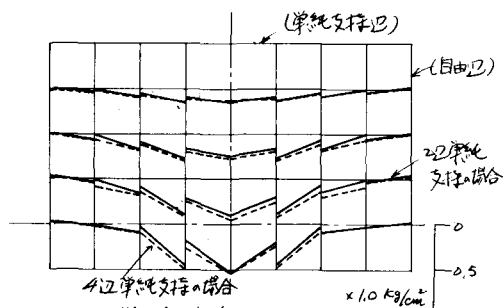


図-10 単一集中荷重(中央点) 1kg
プレート側面 y 方向の応力

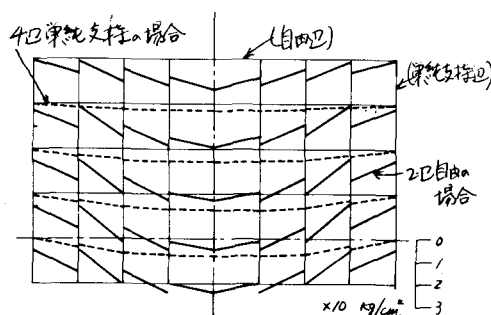


図-11 等分布荷重 1kg/cm² の場合
プレート側面 x 方向の応力

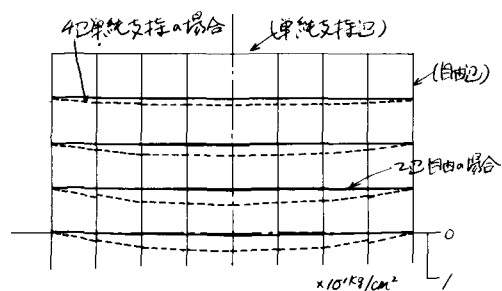


図-12 等分布荷重 1kg/cm² の場合
プレート側面 y 方向の応力

4. あとがき

トラスで補強された薄板について、境界条件が、2辺自由、2辺単独支持の場合の性状を、変位せん断方程式と、Fourier 変換を用いて、解析できることを示した。

以上の理論式の誘導の過程で、境界条件を考慮すれば、2辺自由、2辺固定支持の場合、4点支持の場合も、同様に求めることができる。

計算は、北海道大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用した。

5. 参考文献

- 1) 能町, 松岡, 大島, 坂元: トラスプレート応力解析, 土木学会北海道支部研究発表論文集 第29号 (1973)
- 2) 能町, 松岡, 坂元: CROSS-DIAGONAL を有する TRUSS による補強された平板の曲げについて, 土木学会第20回年次学術講演会講演概要集 (1973)
- 3) 能町, 松岡, 坂元: トラスで補強された平板の応力解析について, 日本道路協会, 第11回日本道路会議論文集 (1973)
- 4) 能町: 剛性ダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱桁の曲げねじりについて, 土木学論文集第44号
- 5) 能町, 松岡, 大島: On the Stress Analysis of the Plate with Multi-crosswise Ribs. マトリクス構造解析法研究発表論文集 (1971)
- 6) 能町: 差分方程式で表わされる不静定構造物の和分変換による解法例 - Cross Diagonal を有する平行弦Trussについて, 土木学会北海道支部 技術資料, 第23号 (1966)
- 7) Sumio G. Nomachi, Kenichi G. Matsuoka: Application of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proceed. of 20 Japan Natl. Congress for Applied Mechanics