

曲げのみに抵抗する横材を有する グリッドフロートの応力解析

北海道大学 工学部 正員 能町純雄
室蘭工業大学 正員 松岡健一
室蘭工業大学 大学院 学生員 ○古路太一

1. まえがき

従来の研究から、曲げのみに抵抗する部材を有する構造物において、モーメントの分配が十分良好なること、また、解析方法においても構造の規則性から定積分変換を用いて、境界値問題に帰着されることが明らかになった。以上のことから立体的な構造の形式として、図-1の如きものを考えられる。すなわち、曲げのみに抵抗する横材を有する平面格子構造物が、下端で固定、両端で単純支持、上端で水平部材により連結されているものである。この構造物の解析の第1段階として、面外の荷重に対する挙動を調べるために、グリッドフロートの横材が曲げのみに抵抗する構造を考えてみた

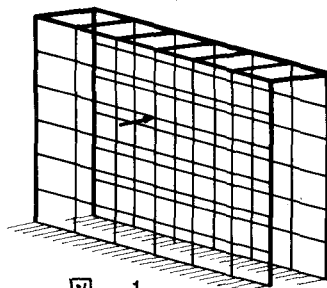


図-1

2. 解 式

図-2に示すように横材が曲げに抵抗し、せん断力わじりに抵抗しないグリッドフロートにおいて、支持条件は、 $x=0, m$ で単純支持、 $y=0, n$ で任意とし、荷重条件としては格点で面に垂直な集中荷重が、 $y=0, n$ で y 方向(x 軸まわり)および x 方向(y 軸まわり)の外力モーメントと面に垂直なせん断力が作用しているとする。これらの外力は立体解析において、 $y=0, n$ での条件が決まれば定まる。次に面内の任意の一要素におけるつり合いを考えると、図-3に示す如く格点(x, y)において、縦材には x 方向のねじりモーメントと y 方向の曲げモーメントが、横材には x 方向に曲げモーメントのみが作用している。

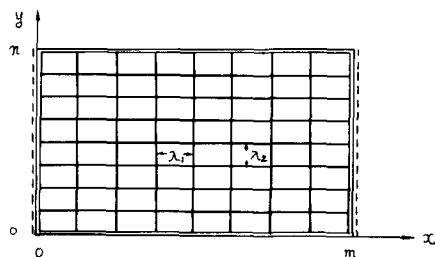


図-2

つり合い式を差分表示すれば、

基本差分方程式

・モーメントのつり合い式；

$$x \text{ 方向: } 2K_1 \left\{ \Delta x^2 \bar{\theta}_{x-1,y} + 6 \bar{\theta}_{x,y} - \frac{3}{\Delta x} \Delta x \delta_{x,y} \right\} - B_2 \Delta y^2 \bar{\theta}_{x,y-1} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$y \text{ 方向: } 2K_2 \left\{ \Delta y^2 \bar{\theta}_{x,y-1} + 6 \bar{\theta}_{x,y} - \frac{3}{\Delta y} \Delta y \delta_{x,y} \right\} = 0 \quad \text{----- (2)}$$

・せん断力のつり合い式；

$$\frac{6K_1}{\Delta x} \left\{ \Delta x \bar{\theta}_{x,y} - \frac{2}{\Delta x} \Delta x^2 \delta_{x-1,y} \right\} + \frac{6K_2}{\Delta y} \left\{ \Delta y \bar{\theta}_{x,y} - \frac{2}{\Delta y} \Delta y^2 \delta_{x,y-1} \right\} = P_{x,y} \quad \text{----- (3)}$$

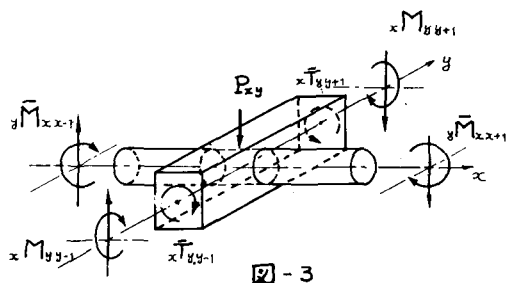
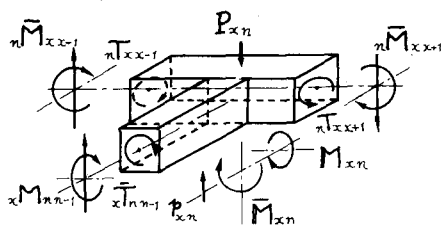


図-3

ここで $\bar{\theta}$; 横枝の節点回転角, K_1 ; 中向横枝の曲げ剛度, δ ; 変位, P ; 集中荷重
 $\bar{\theta}$; 縦枝の節点回転角, K_2 ; 中向縦枝の曲げ剛度, B_2 ; 中向縦枝のねじり剛度

境界条件式



・ $y = n$ におけるつり合い式

$$\begin{aligned} y \text{ 方向} \quad & 2K_2 \{ 2\bar{\theta}_{x,n} + \bar{\theta}_{x,n-1} - \frac{3}{\lambda_2} (\delta_{x,n} - \delta_{x,n-1}) \} \\ \text{の } M; \quad & -B_u \Delta_x^2 \bar{\theta}_{x,n-1} + M_{x,n} = 0 \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} \quad & 2K_u \{ \Delta_x^2 \bar{\theta}_{x-1,n} + 6\bar{\theta}_{x,n} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x,n} \} \\ \text{の } M; \quad & +B_2 (\bar{\theta}_{x,n} - \bar{\theta}_{x,n-1}) + M_{x,n} = 0 \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

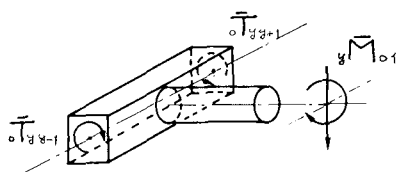
$$\text{せん断力;} \quad -\frac{6K_2}{\lambda_2} \{ \bar{\theta}_{x,n} + \bar{\theta}_{x,n-1} - \frac{2}{\lambda_2} (\delta_{x,n} - \delta_{x,n-1}) \} + \frac{6K_u}{\lambda_1} \{ \Delta_x \bar{\theta}_{x,n} - \frac{2}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x,n-1} \} + P_{x,n} = P_{x,n} \quad \dots\dots (6)$$

・ $y = 0$ におけるつり合い式

$$y \text{ 方向;} \quad 2K_2 \{ 2\bar{\theta}_{x,0} + \bar{\theta}_{x,1} - \frac{3}{\lambda_2} (\delta_{x,1} - \delta_{x,0}) \} - B_u \Delta_x^2 \bar{\theta}_{x-1,0} + M_{x,0} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

$$x \text{ 方向;} \quad 2K_u \{ \Delta_x^2 \bar{\theta}_{x-1,0} + 6\bar{\theta}_{x,0} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x,0} \} - B_2 (\bar{\theta}_{x,1} - \bar{\theta}_{x,0}) + M_{x,0} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

$$\text{せん断力;} \quad \frac{6K_2}{\lambda_2} \{ \bar{\theta}_{x,0} + \bar{\theta}_{x,1} - \frac{2}{\lambda_2} (\delta_{x,1} - \delta_{x,0}) \} + \frac{6K_u}{\lambda_1} \{ \Delta_x \bar{\theta}_{x,0} - \frac{2}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x-1,0} \} + P_{x,0} = P_{x,0} \quad \dots\dots (9)$$



・ $x = 0, m$ におけるつり合い式

x 方向の M ;

$$2K_1 \{ 2\bar{\theta}_{0,y} + \bar{\theta}_{0,y-1} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{0,y} \} - B_e \Delta_y^2 \bar{\theta}_{0,y-1} = 0 \quad (10)$$

$$2K_1 \{ 2\bar{\theta}_{m,y} + \bar{\theta}_{m,y-1} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{m,y} \} - B_e \Delta_y^2 \bar{\theta}_{m,y-1} = 0 \quad (11)$$

(4), (7), (10), (11) 式を考慮して (1) 式を x 方向について $\cos$ 変換, y 方向について $\sin$ 変換, (2) 式を x 方向について $\sin$ 変換, y 方向について $\cos$ 変換, (3) 式を x, y 方向について $\sin$ 変換すると,

$$\mathbb{I} \cdot \mathbb{II} = \mathbb{W} \quad \dots\dots (12)$$

ここで

$$\mathbb{I} = \begin{vmatrix} -\frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & 2K_1 (6-D_i) + B_2 D_n & 0 \\ -\frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{r\pi}{n} & 0 & 2K_2 (6-D_r) \\ \frac{12K_1}{\lambda_1} D_i + \frac{12K_2}{\lambda_2} D_n & -\frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & -\frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{r\pi}{n} \end{vmatrix} \quad \mathbb{II} = \begin{vmatrix} \Delta_x \bar{\theta}_{i,r} \\ \bar{\theta}_{i,r} \\ \bar{\theta}_{i,r} \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{W} = \begin{vmatrix} -(B_e - \frac{B_2}{2}) \{ (-1)^r ST1 - ST2 \} \sin \frac{r\pi}{n} + D_n \{ \mathcal{S}_r [\bar{\theta}_{m,y}] (-1)^i + \mathcal{S}_r [\bar{\theta}_{0,y}] \} \\ -B_2 \sin \frac{r\pi}{n} \{ (-1)^r R_i [\bar{\theta}_{x,n}] - R_i [\bar{\theta}_{x,0}] \} \\ \frac{3K_2}{\lambda_2} (4-D_r) \{ \mathcal{S}_i [\delta_{x,n}] (-1)^r - \mathcal{S}_i [\delta_{x,0}] \} - D_i B_u \{ \mathcal{S}_i [\bar{\theta}_{x,n}] (-1)^r + \mathcal{S}_i [\bar{\theta}_{x,0}] \} \\ -\mathcal{S}_i [M_{x,n}] (-1)^r - \mathcal{S}_i [M_{x,0}] \\ + D_i B_u - \frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{r\pi}{n} \{ (-1)^r \mathcal{S}_i [\delta_{x,n}] - \mathcal{S}_i [\delta_{x,0}] \} \end{vmatrix}$$

$$\text{但し, } \bar{\theta}_{i,r} = \mathcal{S}_r R_i [\bar{\theta}_{x,y}] = \frac{1}{2} \mathcal{S}_r [\bar{\theta}_{m,y}] (-1)^i + \frac{1}{2} \mathcal{S}_r [\bar{\theta}_{0,y}] + C_i \mathcal{S}_r [\bar{\theta}_{x,y}], \quad D_i = 2 (1 - \cos \frac{i\pi}{m})$$

$$\bar{\theta}_{i,r} = \mathcal{S}_i R_r [\bar{\theta}_{x,y}] = \frac{1}{2} \mathcal{S}_i [\bar{\theta}_{x,n}] (-1)^r + \frac{1}{2} \mathcal{S}_i [\bar{\theta}_{x,0}] + C_r \mathcal{S}_i [\bar{\theta}_{x,y}], \quad D_r = 2 (1 - \cos \frac{r\pi}{n})$$

$$\Delta_x \bar{\theta}_{i,r} = \mathcal{S}_i \mathcal{S}_r (\delta_{x,y}), \quad \bar{\theta}_{i,r} = \mathcal{S}_i \mathcal{S}_r (P_{x,y})$$

$$ST1 = \bar{\theta}_{m,n} (-1)^i + \bar{\theta}_{0,n}, \quad ST2 = \bar{\theta}_{m,0} (-1)^i + \bar{\theta}_{0,0}$$

次に、境界条件式 (5), (8) 式を 4 隅におけるつり合いを考慮して、 x 方向に $\cos$ 変換し、(6), (9) 式を x 方向に $\sin$ 変換したものをマトリックス表示すれば、

$$A_i \cdot B_i = E_i \cdot F_i + G_i \quad \text{----- (13)}$$

$$A_i = \begin{vmatrix} 2ku(6-D_i) + B_2 & 0 & -\frac{12Ku}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ku(6-D_i) + B_2 & 0 & -\frac{12Ku}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{12Ku}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & 0 & \frac{12K_2}{\lambda_2^2} + \frac{12Ku}{\lambda_1^2} D_i & 0 & -\frac{6K_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & -\frac{12Ku}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} & 0 & \frac{12K_2}{\lambda_2^2} + \frac{12Ku}{\lambda_1^2} D_i & 0 & \frac{6K_2}{\lambda_2} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} R_i[\bar{\theta}_{xn}] \\ R_i[\bar{\theta}_{x0}] \\ S_i[\delta_{xn}] \\ S_i[\delta_{x0}] \\ S_i[\bar{\theta}_{xn}] \\ S_i[\bar{\theta}_{x0}] \end{vmatrix} \quad E_i = \begin{vmatrix} B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6K_2}{\lambda_2} & 0 & \frac{12K_2}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6K_2}{\lambda_2} & 0 & \frac{12K_2}{\lambda_2^2} \end{vmatrix}$$

$$F_i = \begin{vmatrix} R_i[\bar{\theta}_{xn-1}] \\ R_i[\bar{\theta}_{x1}] \\ S_i[\bar{\theta}_{xn-1}] \\ S_i[\bar{\theta}_{x1}] \\ S_i[\delta_{xn-1}] \\ S_i[\delta_{x1}] \end{vmatrix} \quad G_i = \begin{vmatrix} -(B_2 - \frac{B_2}{2})(ST1 - ST3) - \{C_i[\bar{M}_{xn}] + \bar{M}_{on} + (-1)^i \bar{M}_{mn}\} \\ -(B_2 - \frac{B_2}{2})(ST2 - ST4) - \{C_i[\bar{M}_{x0}] + \bar{M}_{o0} + (-1)^i \bar{M}_{m0}\} \\ S_i[P_{xn}] - S_i[P_{xn}] \\ S_i[P_{x0}] - S_i[P_{x0}] \end{vmatrix}$$

$$\text{但し, } ST3 = \bar{\theta}_{mn-1}(-1)^i - \bar{\theta}_{on-1}, \quad ST4 = \bar{\theta}_{m1}(-1)^i + \bar{\theta}_{o1}$$

(12) 式から $\bar{\omega}_{in}$, $\bar{\theta}_{in}$, $\bar{\phi}_{in}$ は J_i の逆マトリックス J_i^{-1} を左から作用させれば,

$$U_i = J_i^{-1} \cdot W_i \quad \text{----- (14)}$$

により求める。(12), (13) 式中の境界値の中で (14) 式を逆変換して求められるものは,

$$\begin{aligned} S_i[\bar{\theta}_{xn}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^n \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=n} & S_i[\bar{\theta}_{x0}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^n \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=0} \\ S_i[\bar{\theta}_{xn-1}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^n \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=n-1} & S_i[\bar{\theta}_{x1}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^n \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=1} \\ R_i[\bar{\theta}_{xn-1}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=n-1} & R_i[\bar{\theta}_{x1}] &= \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{y=1} \\ S_i[\bar{\theta}_{m1}] &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m \bar{\theta}_{il} \cos \frac{l\pi}{m} x \Big|_{x=m} & S_i[\bar{\theta}_{o1}] &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m \bar{\theta}_{il} \cos \frac{l\pi}{m} x \Big|_{x=0} \\ \bar{\theta}_{mn} &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m R_i[\bar{\theta}_{xn}] \cos \frac{l\pi}{m} x \Big|_{x=m} & \bar{\theta}_{on} &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m R_i[\bar{\theta}_{xn}] \cos \frac{l\pi}{m} y \Big|_{x=0} \\ \bar{\theta}_{m0} &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m R_i[\bar{\theta}_{x0}] \cos \frac{l\pi}{m} x \Big|_{x=m} & \bar{\theta}_{o0} &= \frac{2}{m} \sum_{l=0}^m R_i[\bar{\theta}_{x0}] \cos \frac{l\pi}{m} y \Big|_{x=0} \\ \bar{\theta}_{mn-1} &= \frac{4}{mn} \sum_{l=0}^m \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{l\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{x=m, y=n-1} & \bar{\theta}_{m1} &= \frac{4}{mn} \sum_{l=0}^m \sum_{r=0}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{l\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{x=m, y=1} \\ \bar{\theta}_{on-1} &= \frac{4}{mn} \sum_{l=0}^m \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{l\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{x=0, y=n-1} & \bar{\theta}_{o1} &= \frac{4}{mn} \sum_{l=0}^m \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\theta}_{ir} \cos \frac{l\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \Big|_{x=0, y=1} \end{aligned}$$

である。よって結局、境界値として残るのは、 $R_i[\bar{\theta}_{xn}]$, $R_i[\bar{\theta}_{x0}]$, $S_i[\delta_{xn}]$, $S_i[\delta_{x0}]$ である。これより (13) 式は、次の如く表わせる。

$$A_i \cdot \begin{vmatrix} R_i[\bar{\theta}_{xy}] \\ R_i[\bar{\theta}_{x0}] \\ S_i[\delta_{xy}] \\ S_i[\delta_{x0}] \end{vmatrix} = G_i \quad \text{----- (15)}$$

故に、(15)式より境界値が決まるから、 δ_{xy} , $\bar{\theta}_{xy}$, θ_{xy} は(14)式を逆変換して次式となる。

$$\delta_{xy} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} Q_{ij} \sin \frac{i\pi}{m} x \cdot \sin \frac{j\pi}{n} y$$

$$\bar{\theta}_{xy} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \bar{Q}_{ij} \cos \frac{i\pi}{m} x \cdot \sin \frac{j\pi}{n} y$$

$$\theta_{xy} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ij} \sin \frac{i\pi}{m} x \cdot \cos \frac{j\pi}{n} y$$

3. 数値計算例

今、簡単のために、周辺が単純支持されており、集中荷重以外に外力が作用していない場合を考える。断端諸元は以下のとおりであるが、3種類のねじり剛度について計算した。尚、計算に際しては、北大のF230-60および室工大のF231を使用した。

$$\lambda_1 = 10.0, \lambda_2 = 15.0, K_1 = 444.0, K_2 = 196.0$$

$$m = 10, n = 6, a = 3, b = 2$$

$$P = 5 \quad (\text{但し、} a, b \text{ は 載荷点 } x, y \text{ の座標値})$$

$$n\#1: B_E = B_Z = B_U = 500.0 \quad \text{-----}$$

$$n\#2: B_E = B_Z = B_U = 5000.0 \quad \text{-----}$$

$$n\#3: B_E = B_U = 50000.0 \quad B_Z = 34600.0 \quad \text{-----}$$

4. あとがき

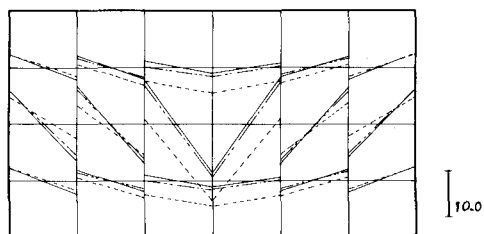
曲げモーメント図より明らかになるように、縦枝のねじり剛が大きいほどモーメントの分配が良いいことがわかる。

5. 参考文献

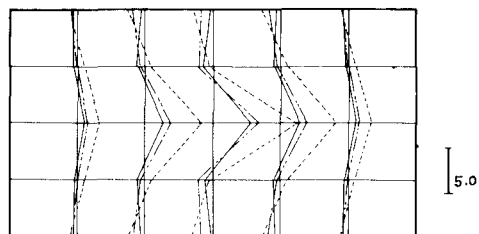
1) Sumio G. Nomachi, Kenichi G. Matsuoka; Application of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics (Proceedings of the Twentieth Japan National Congress for Applied Mechanics 1970)

2) Sumio G. Nomachi; On a Stress Analysis of Grid Plate by Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration (Proceedings of the Sixteenth Japan National Congress for Applied Mechanics 1966)

横枝の曲げモーメント図



縦枝の曲げモーメント図



変位図

