

トポロジカル一致を応用した グリッドプレート解析

北海道大学 工学部 正員 能町 純雄
室蘭工業大学 正員 松岡 健一
室蘭工業大学 大学院○学生員 高 壽 松 範

1 まえがき

幾つかの任意の構造物を考え、二通りの構造物間の位相の不変量を

- (i) 格点数
- (ii) 対応格点の自由度
- (iii) 対応格点の相対的位置

の3つとし、格点間距離、断面特性、材料特性は含まないものとする。

二通りの不変量が一致する構造物を、互いにトポロジカル一致を有する構造物とする。

このトポロジカル一致を有する構造物において、一方の構造物で実際の解析演算を行ない、他方の構造物で各格点の力の釣り合いを check しながら使役の構造物を解析するものである。

本解析法によると、irregularな形状を有するものでも、一方の構造物に極めて regularなものを選ぶことができ、この様な regularな構造物を解析することにより帰着する。

本報告は、グリッドプレートを解析対象構造物とし、本解析法の有効性を示すものである。

2 解析理論

2-1 トポロジカル一致を有する構造物間の関係

解析の対象とする構造物 (Object structure と呼ぶ)、それとトポロジカル一致を有する構造物 (Model structure と呼ぶ) において、それぞれ剛性マトリックスを B_0, B_M , 変位ベクトルを U_0, U_M , とし、荷重ベクトルを P , とすると、両構造物間において次式が成り立つ。

$$B_M U_M = P \quad (1)$$

$$B_0 U_0 = P \quad (2)$$

ここで $B_0 = B_M + B'$ とおけるから、(1), (2)の左から B_M^{-1} を作用させると、(1), (2)はそれぞれ

$$U_M = B_M^{-1} P \quad (1')$$

$$B_M^{-1} (B_M + B') U_0 = U_0 + B_M^{-1} B' U_0 = B_M^{-1} P \quad (2')$$

更け、 $B_M^{-1} B' = C$ とおくと、(1)', (2')より (2')は

$$U_0 + C U_0 = U_M \quad (3)$$

となり、 U_0 は逐次計算法により次式の様に求められる。

$$U_0 = U_M - C U_M + C^2 U_M - \dots = \sum_{p=0}^{\infty} (-C)^p U_M \quad (4)$$

この級数が収束することにより解が求まる。

則ち、(2)の U_0 を U_M に代入すると、

$$B_0 U_M = B_M U_M + B' U_M = P + B' U_M \quad (5)$$

(5)の右辺の $B' U_M$ を Residual で、この Residual を Model structure に作用させ、変位 U_M' を求めると、

$$B_M U_M' = B' U_M \quad \text{i.e.} \quad U_M' = C U_M \quad (6)$$

(6)は(4)の第2項に相当するもので、上記操作を繰返すことにより各項が求まる。

2-2 収束条件

(4)が収束する条件は次式で与えられる。

$$0 < \frac{\max_i \left(\sum_{k=1}^n |b_{ik}^0| \right)}{\max_i \left(\sum_{k=1}^M |b_{ik}^M| \right)} < 2 \quad (7)$$

ここで b_{ik}^0, b_{ik}^M は、前述の B_0, B_M の要素

(7)の意味は、各釣り合い式について、係数の絶対値の和の最大値の比が0と2の間にあることである。

2-3 グリッドプレート方程式

Fig. 1 の格葉 (x, y) において、 x, y 方向のモーメントの釣り合い及び、せん断力の釣り合いをとり、差分表示すると、

$$-B_2 \Delta_x^2 \theta_{x,y-1} + 2K_1 (6\theta_{x,y} + \Delta_x^2 \theta_{x-1,y} - \frac{\Delta_x}{\lambda_1} \Delta_x \theta_{x+1,y}) = M_{x,y} \quad (8)$$

$$-B_1 \Delta_y^2 \theta'_{x-1,y} + 2K_2 (6\theta'_{x,y} + \Delta_y^2 \theta'_{x,y-1} - \frac{\Delta_y}{\lambda_2} \Delta_y \theta'_{x,y+1}) = M'_{x,y} \quad (9)$$

$$\frac{6K_1}{\lambda_1} (\Delta_x \theta_{x,y} - \frac{\Delta_x}{\lambda_1} \Delta_x^2 \theta_{x-1,y}) + \frac{6K_2}{\lambda_2} (\Delta_y \theta'_{x,y-1} - \frac{\Delta_y}{\lambda_2} \Delta_y^2 \theta'_{x,y-1}) = g_{x,y} \quad (10)$$

ここで、

$\theta_{x,y}, \theta'_{x,y}$; それぞれ、 x, y 軸回りの回転角 at (x, y)

$\Delta_x \theta_{x,y}$; 撓み at (x, y)

$M_{x,y}, M'_{x,y}$; それぞれ、 x, y 方向の外力モーメント at (x, y)

又、

$$\Delta f_{x-1} = f_{x+1} - f_{x-1}, \quad \Delta^2 f_{x-1} = f_{x+1} - 2f_x + f_{x-1}$$

(8)~(10) $K, Fourier$ 定積分変換を施し、境界条件を4辺 simple support とし、重 K $B_{10} = B_1/2, B_{20} = B_2/2$ とすると、

$$\{2K_1(6-Dim) + B_2 D_{jn}\} \Theta_{ij} - \frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} \cdot \Delta_{ij} = C_i S_j [M_{x,y}] \quad (11)$$

$$\{2K_2(6-D_{jn}) + B_1 Dim\} \Theta'_{ij} - \frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \Delta'_{ij} = S_i C_j [M'_{x,y}] \quad (12)$$

$$-\frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m} \cdot \Theta_{ij} - \frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \Theta'_{ij} + \left\{ \frac{12K_1}{\lambda_1^2} Dim + \frac{12K_2}{\lambda_2^2} D_{jn} \right\} \cdot \Delta_{ij} = S_i S_j [g_{x,y}] \quad (13)$$

ここで、 $C_i S_j$ は cosine sine 変換、 $S_i C_j$ は sine cosine 変換、 $S_i S_j$ は sine sine 変換を表す。

又、

$$Dim = 2(1 - \cos i\pi/m)$$

$$D_{jn} = 2(1 - \cos j\pi/n)$$

$$\Theta_{ij} = C_i S_j [\theta_{x,y}] + 1/2 (-1)^i S_j [\theta_{m,y}] + 1/2 S_j [\theta_{0,y}]$$

$$\Theta'_{ij} = S_i C_j [\theta'_{x,y}] + 1/2 (-1)^j S_i [\theta'_{x,n}] + 1/2 S_i [\theta'_{x,0}]$$

$$\Delta_{ij} = S_i S_j [\Delta_{x,y}]$$

(11)~(13)を逆変換すると、

$$\theta_{x,y} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \Theta_{ij} \cos \frac{i\pi x}{m} \sin \frac{j\pi y}{n} + \frac{2}{mn} \sum_{j=1}^{n-1} \Theta_{0j} \sin \frac{j\pi y}{n} + \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \Theta_{mi} \sin \frac{i\pi x}{m} \quad (14)$$

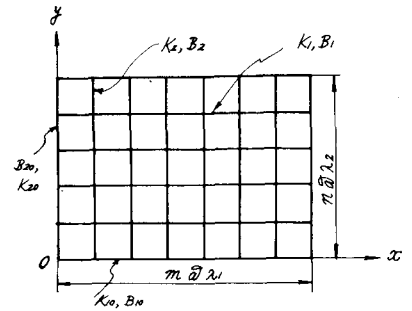


Fig. 1 Plan of grid plate

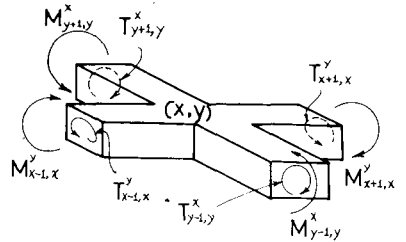


Fig. 2 Moment at (x,y)

$$\theta_{xy} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ij} \sin \frac{i\pi x}{m} \cos \frac{j\pi y}{n} + \frac{2}{m\pi} \sum_{i=1}^{m-1} \theta_{i0} \sin \frac{i\pi x}{m} + \frac{2}{m\pi} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \theta_{i0} \sin \frac{i\pi x}{m} \quad (15)$$

$$\delta_{xy} = \frac{4}{m\pi} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{ij} \sin \frac{i\pi x}{m} \sin \frac{j\pi y}{n} \quad (16)$$

(14)~(16)より、 θ_{xy} , θ'_{xy} , δ_{xy} が求まる。則ち、Object structure で力の Residual をとり、Fourier 逆変換して、(14)~(16)より Residual κ なる θ_{xy} , θ'_{xy} , δ_{xy} が求まり、これを Object structure κ 代入し、演算を繰り返すことにより最終的結果を得る。

3 数値計算例

Fig. 3, Fig. 4 κ 示す様な A, B 2種のグリッドプレートを解析例とし、それぞれ、30°, 60°, 90° κ 曲折した場合を考える。

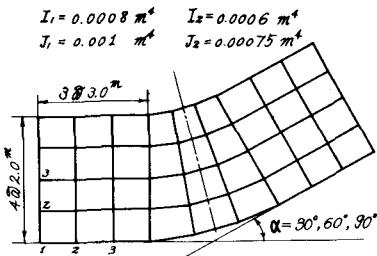


Fig. 3 Object Structure A

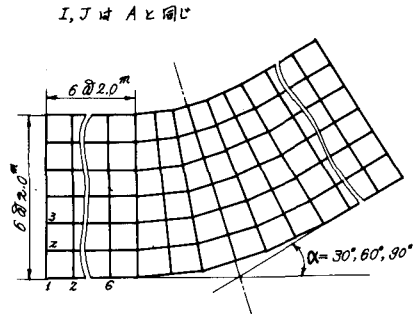


Fig. 4 Object Structure B

3-1 Object Structure Aの場合

Model structure κ は、Fig. 1 を参照して、

$$m \times n = 9 \times 4$$

$$\lambda_1 = 3.0\text{m}, \lambda_2 = 2.0\text{m}$$

I, J は Object structure と同じとし、又、荷重位置は

(A-1) = 格点(5,3) and (6,3)

(A-2) = 格点(5,3)

(A-3) = 格点(3,3)

の3通りである。

計算結果を Fig. 5 ~ Fig. 11 κ 示す。Fig. κ は最も収束の悪い点を示してあるが、90°の場合でも7~8回で収束しており、この場合、両者の全体の剛性が非常に類似しているといえる。

3-2 Object Structure Bの場合

$$m \times n = 18 \times 6$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.0\text{m}$$

荷重位置は、格点(10,4)

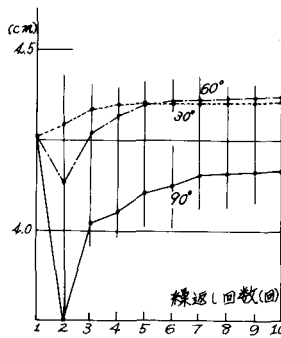


Fig. 5 Deflection (A-1) at (5,3)

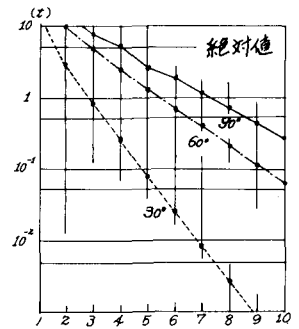


Fig. 6 Residual B(5,3) (A-1)

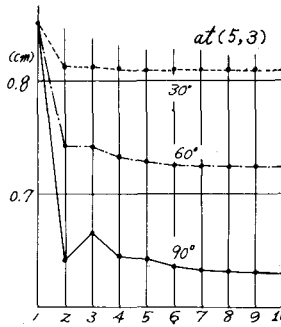


Fig. 7 Deflection (A-3)

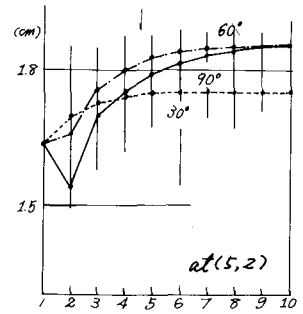


Fig. 8 Deflection (A-2)

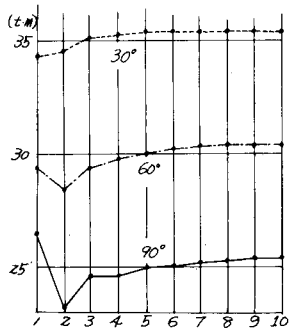


Fig. 9 $M_{5.6}^{y=3}$ (A-1)

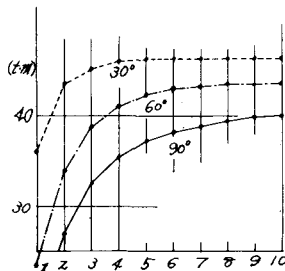


Fig. 10 $M_{5.6}^{y=3}$ (A-2)

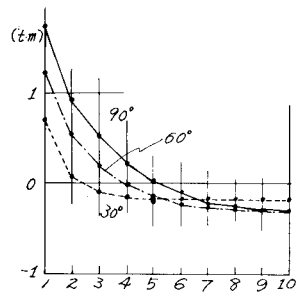


Fig. 11 $T_{5.6}^{y=3}$ (A-2)

計算結果をFig. 12~Fig. 16に示す。

尤も、Fig. 12~Fig. 14は、Model structureのI, JとObject structureの1/2倍, 3/2倍と1/4倍の場合の収束の様子で、Fig. 15, Fig. 16は、Model structureのI, Jを変化させた場合の収束、発散の様子を示す。

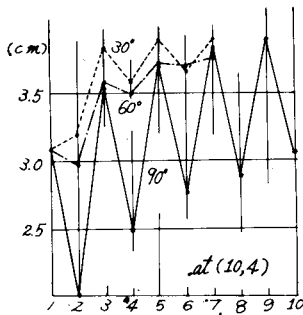


Fig. 12 Deflection (B)

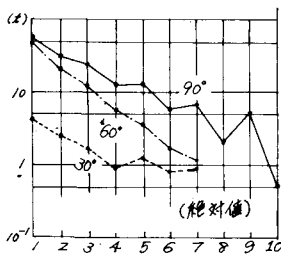


Fig. 13 Residual $B(10, 4)$ (B)

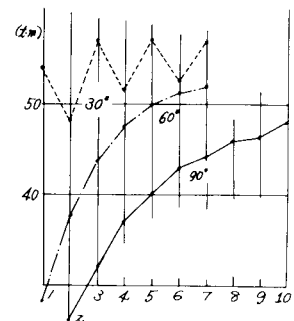


Fig. 14 $M_{10.11}^{y=4}$ (B)

Aの場合に比べ収束は緩慢であり長い剛性のModel structure.と云えぬが、長いModel st.を見出すことは可能であると云える。

4 おまけ

本報告計算法によると、膨大な大きさの剛性マトリックスの宣言が必要であり、又、Fourier 変換と変換を施すことにより、array用core領域をかなり少なくでき、少量の電子計算機に解法といえる。

この利便の反面、格数が増えるに依り、直接解析の場合より計算時間が多く費やると思われ、また長い剛性のModel structureを導くという事が一つの課題である。

尚、連立方程式を用いて直接解析した場合との具体的な比較は、現在計算検討中である。

参考文献 (1) S.G. Nomachi; On a stress analysis of Grid Plate by Finite Fourier Transforms concerning Finite Integration (Proceeding of Sixteenth Japan National Congress for Applied Mechanics 1966)

(2) S.G. Nomachi; A Note of Finite Fourier Transforms concerning Finite Integration (Trans. Jpn. Mech. Soc. Vol. 32, No. 2)

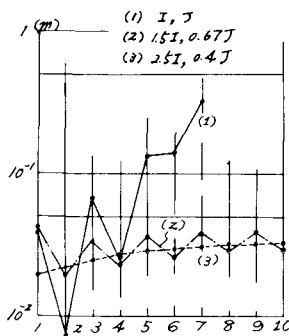


Fig. 15 Deflection (B) at (10, 4)

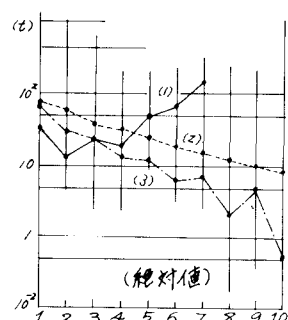


Fig. 16 Residual $B(10, 4)$