

リブプレートに面外曲げ剛性を考慮した リブプレートの応力解析について

北大工学部 正員 能町 純雄
北見工業大学 正員 大島 俊之

1. まえがき

著者は先に膜理論によるリブプレートの応力解析について報告した¹⁾が、今回はリブプレートに面外曲げ剛性を考慮した式の誘導と数値計算を行なったのを報告したい。==を用いた板の曲げを考慮したものは、Donald L. Dean²⁾が発表したものと同じで、彼らはNoncomposite Membrane-Flexural Analysisと呼んでいる。本報告においては、板の面外曲げを無視したこれまでの式と引き比べるために数値的に比較を行ない、膜理論がどれだけの値を与えていることを述べてい。

2. 逐次積分法と定積分変換について

これまで何度か報告されているが、我々を用いている逐次積分法は定積分変換と共に応用力学の分野で、広く応用できる。二次元応力状態におけるフーリエ変換を考えると、一般に次のような形式の微分方程式を得る。⁴⁾

$$K(U) + G_1 U + G_2 V = 0 \quad (1)$$

この段階では変位 U, V は x 方向に連続な関数である。次に座標を等間隔な異次元軸と考えると、考えられている領域内の変位はそれぞれのみで定義され、その中間は直線的に変化すると考える。==を用いて求められた有限個の異次元変位から与えられた差分方程式は文献³⁾によって次のように与えられる。

$$\frac{K}{\lambda} \Delta_x^2 U_{x-1} + \frac{G_1 \lambda}{S} (\Delta_x^2 U_{x-1} + 6 U_x) + \frac{G_2}{S} \Delta_x V_x = 0 \quad (2)$$

==に λ = 区間長、 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x-1)$ 、 $\Delta^2 f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$

である。==の差分方程式は S. G. Nomachi and K. G. Matsuoka⁵⁾ によって発表されているように、有限級数とフーリエ変換と逆変換を行なうことができる。

フーリエ変換無限展開においても、収束の速い解曲線の場合には半周期区間の級数とのみで十分に精度よい解を得ることができる。⁶⁾ また後述の図からも判るが、単一集中荷重による荷重点近傍の x 点のように精度の悪いものは、半周期の有限級数とでは両者の間にかなりの差異があることを数値計算から知ることもできる。

3. 解法

図を参照して、次の五本のフーリエ変換式を得る。

- 1) $y=Y$ における x 方向のリブとリブプレートとの接合線にそって剪断力のフーリエ変換。
 - 2) 同様 $x=X$ における y 方向の剪断力のフーリエ変換。
 - 3) 直交するリブの交点 (X, Y) における x 方向のフーリエ変換。
 - 4) x 方向のリブの下側の境界条件
 - 5) y 方向のリブの下側の境界条件
- これらはそれぞれ次のように表わされる。

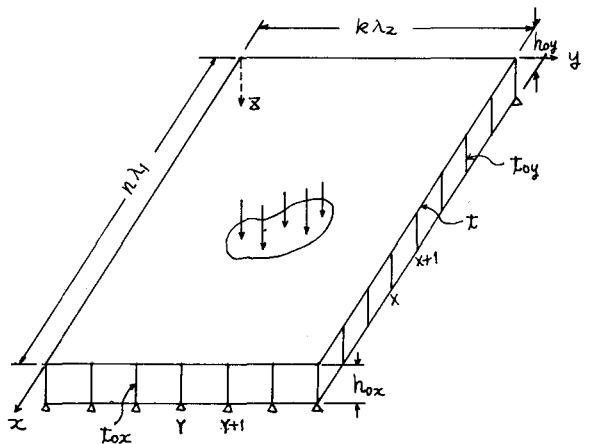


図-1. リブプレート

$$T_{Y,Y+1}^0(x) + T_{Y,Y-1}(x) + T_Y^{0z}(x) = 0 \quad (3)$$

$$T_{X,X+1}(y) + T_{X,X-1}(y) + T_X^{0z}(y) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}(x, x+1) - \mathcal{C}(x, x-1) + \mathcal{C}(x, y+1) - \mathcal{C}(x, y-1) \\ & = -P_{xy} + D \Delta^2 W \cdot \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$T_Y^{z0}(x) = 0 \quad (6) \quad T_X^{z0}(y) = 0 \quad (7)$$

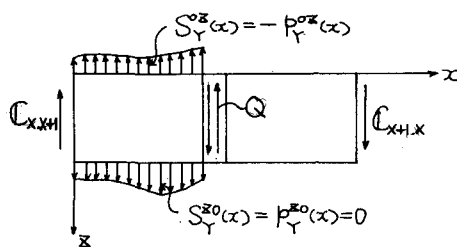


図-2. リブ要素

== z alphabet a 小文字座標 x, y は Continuous Coordinates, 大文字 X, Y は Discrete Coordinates を表わしている。

$$D = \frac{E \pi^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (\text{Laplace の演算子})$$

上式 (3), (4), (6), (7) の T はこれからこのように文献⁷⁾の変位剪断公式を代入すると、2階常微分方程式が得られるので、前述の逐次積分によって差分方程式を導くことができるが、=4=については文献³⁾にあるので、==5)は(5)式から差分方程式を導く過程について述べておく。

文献⁷⁾の(13)式より、リブ要素に作用する力と変位の関係式は次式で与えられる。(図2参照)

$$G t_{0x} h_{0x} W - G t_{0x} (U^{0z} - U^z) = (\bar{S}_Y^{0z} - \bar{S}_Y^{z0}) + C \cdot h_{0x} = -\bar{P} + \mathcal{C} \quad (8)$$

次に上式の変位 U に前述と同じ変位仮定を行なうと、 x について一度 $0 \sim \lambda$ まで定積分を行ない、境界の合計剪断力 $\mathcal{C}$ について解くと次式を得る。

$$C_{X,X+1} = \frac{G t_{0x} h_{0x}}{\lambda} \Delta_x W_x - \frac{G t_{0x}}{2} (\nabla_x U_x^{0z} - \nabla_x U_x^{z0}) + \frac{\bar{P}}{\lambda} \int_0^\lambda \quad (9)$$

$$== z, \quad \nabla f(x) = f(x+1) - f(x)$$

同様にして、 $C_{X,X-1}$, $C_{Y,Y+1}$, $C_{Y,Y-1}$ についても導くことができるので、これを(5)式に代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{G t_{0x} h_{0x}}{\lambda_1} \Delta_x^2 W_{X-1,Y} + \frac{G t_{0y} h_{0y}}{\lambda_2} \Delta_y^2 W_{X,Y-1} + \frac{G t_{0x}}{2} (\Delta_x U_{X,Y}^{0z} - \Delta_x U_{X,Y}^{z0}) \\ & + \frac{G t_{0y}}{2} (\Delta_y U_{X,Y}^{0z} - \Delta_y U_{X,Y}^{z0}) = -P_{xy} - \frac{1}{\lambda_1} (\bar{P}_{X,X+1} \int_0^{\lambda_1} + \bar{P}_{X,X-1} \int_0^{\lambda_1}) - \frac{1}{\lambda_2} (\bar{P}_{Y,Y+1} \int_0^{\lambda_2} + \bar{P}_{Y,Y-1} \int_0^{\lambda_2}) \\ & + D \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2 W \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{手元接点 } W \text{ を} \quad W(x, y) = \frac{4}{n k} \sum_{x=1}^{n-1} \sum_{y=1}^{k-1} S_m S_i [W(x, y)] \sin \frac{m \pi x}{n} \sin \frac{i \pi y}{k} \quad (11)$$

$$S_m S_i [W(x, y)] = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k-1} W(x, y) \sin \frac{m \pi x}{n} \sin \frac{i \pi y}{k} \quad (12)$$

と仮定し、変換を行なうと(10)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{G t_{0x} h_{0x}}{\lambda_1} D_m + \frac{G t_{0y} h_{0y}}{\lambda_2} D_i + \lambda_1 \lambda_2 D \cdot \pi^4 \left\{ \left(\frac{m}{n \lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{i}{k \lambda_2} \right)^2 \right\} \right] S_m S_i [W_{xy}] \\ & + G t_{0x} \sin \frac{m \pi}{n} (R_m S_i [U_{xy}] - R_m S_i [U_{xy}^z]) + G t_{0y} \sin \frac{i \pi}{k} (S_m R_i [U_{xy}] - S_m R_i [U_{xy}^z]) \\ & = -S_m S_i [P_{xy}] + \bar{P}_B \end{aligned} \quad (13)$$

== z P_{xy} は外力としての荷重を表す $\bar{P}_B$ であるものとし、また $\bar{P}_B$ は変換による境界値を表す

含まれるものとする。

また、他の4本のフリップ式(3), (4), (6), (7)から求めた差分式を変換するとにより、次の剛性方程式を得る。

$$[K] \{U\} = \{F\} + \{F_B\} \quad (14)$$

$\{U\}$ は $\{U\}^T = \{U_{xy}, U_{xy}^z, U_{xy}^y, U_{xy}^x, U_{xy}^z, U_{xy}^y, U_{xy}^x\}$, $\{F\}$ は $\{F_{xy}\}$ を含む、各フリップ式の方法の外力の荷重項、 $\{F_B\}$ は境界値から求まる付加荷重項である。 $[K]$ は 5×5 の対称マトリックスで、その内容は次の様である。

$$k_{11} = -\left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{3\lambda_1}\right) D_m + \frac{N_x}{6\lambda_1} D_m D_i - \frac{G_{tox} \lambda_1}{h_{ox}} \left(1 - \frac{D_m}{\delta}\right) - \frac{G_{tx} \lambda_1}{\lambda_2} D_i \left(1 - \frac{D_m}{\delta}\right)$$

$$k_{12} = -\frac{N_{ox}}{6\lambda_1} D_m + \frac{G_{tox} \lambda_1}{h_{ox}} \left(1 - \frac{D_m}{\delta}\right), \quad k_{13} = G_{tox} \sin \frac{m\pi}{n}, \quad k_{14} = 0, \quad k_{15} = -G_{tx} \sin \frac{i\pi}{k} \sin \frac{m\pi}{n}$$

$$k_{22} = -\frac{N_{ox}}{3\lambda_1} D_m - \frac{G_{tox} \lambda_1}{h_{ox}} \left(1 - \frac{D_m}{\delta}\right), \quad k_{23} = -G_{tox} \sin \frac{m\pi}{n}, \quad k_{24} = k_{25} = 0$$

$$k_{33} = -\frac{G_{tox} h_{ox}}{\lambda_1} D_m - \frac{G_{tox} h_{oy}}{\lambda_2} D_i - D_i \pi^4 \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \left(\frac{m}{n\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{i}{k\lambda_2}\right)^2 \right\}, \quad k_{34} = -G_{tox} \sin \frac{i\pi}{k}$$

$$k_{35} = G_{tox} \sin \frac{i\pi}{k}, \quad k_{44} = -\frac{N_{oy}}{3\lambda_2} D_i - \frac{G_{tox} \lambda_2}{h_{oy}} \left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right), \quad k_{45} = -\frac{N_{oy}}{6\lambda_2} D_i + \frac{G_{tox} \lambda_2}{h_{oy}} \left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right)$$

$$k_{55} = -\left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{N_{oy}}{3\lambda_2}\right) D_i + \frac{N_y}{6\lambda_2} D_m D_i - \frac{G_{tox} \lambda_2}{h_{oy}} \left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right) - \frac{G_{tx} \lambda_2}{\lambda_1} D_m \left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right)$$

以上から、(14)式を解いて、逆変換を行なうと各点の変位が求まる。また変位が求まると、応力はEとえば式から、フリップレート内のx方向の各点の応力が求められる。

$$\left[\left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right) N_x + \frac{N_{ox}}{4}\right] S_i [\dot{U}_{xy}] = \left[\left(1 - \frac{D_i}{\delta}\right) \frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{4\lambda_1}\right] S_i [\Delta_x U_{xy}] + G_{\lambda_1} \left(\frac{t_{ox}}{4h_{ox}} - \frac{t}{6\lambda_2} D_i\right) x$$

$$(2 S_i [U_{xy}] + S_i [U_{x+1,y}]) - \frac{G_{tox} \lambda_1}{4h_{ox}} (2 S_i [U_{xy}^z] + S_i [U_{x+1,y}^z])$$

$$- \frac{G_{tx}}{2} \sin \frac{i\pi}{k} (R_i [U_{x+1,y}] - R_i [U_{xy}]) - \frac{3}{4} G_{tox} (S_i [U_{x+1,y}] - S_i [U_{xy}]) \quad (15)$$

4. 数値計算例

周辺単純支持のリブプレートについて、次の断面諸元を計算し、板の面外曲げを考慮しない場合の値と、Timoshenkoによる連続体としての換算断面二次モーメントによる計算値と比較して示した。(図3.4)

$$E = 40,000 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 20,000 \text{ kg/cm}^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 10 \text{ cm}, \quad t = t_{ox} = t_{oy} = 5 \text{ mm},$$

$$h_{ox} = h_{oy} = 6 \text{ cm}, \quad n = 8, \quad k = 6$$

5. まとめ

1). 以上、Deanの方法によって板の out-of-plane stiffness を考慮して、リブプレートの解析を行なった。数値計算例から判る様に設計上は膜理論で十分と思われるが、集中荷重の作用点近くには応力を過大評価したり、過小評価したりすることのない様、他の解析による場合も数値結果をよく検討する必要があると思う。

2). また、フリップレートが薄板の様に厚くなるに、板の曲げ剛性がかなり大きくなるので、各矩形要素に曲げを考慮する式によって解析する必要のあるが、これは別途発表したい。

3). リブ間隔が大きくなったり、高さが高くなると、直線性の仮定がどの程度まで近似的かという精度の問題があって設計上重要と思われるが、この点も検討したいと思う。

計算はNECの FACOM 230-60 と日立エス OBITAC 4500 によって行なった。

参考文献

- 1). 能町, 松岡, 大島: 土木学会北海道支部論文集 第27号 (1971) P.19 .
- 2). Donald L. Dean: Analysis of Slab-Stringer-Diaphragm System:
The Report to The North Carolina State Highway Commission and The U.S.
Department of Transportation Bureau of Public Roads (1970) .
- 3). 能町, 松岡, 大島: マトリクス構造解析法研究発表会論文集, 第5回 (1971) .
- 4). 能町, 大島: 土木学会第27回年次学術講演会概要集 P.330 (1972) .
- 5). S.G. Nomachi and K.G. Matsuoka: Applications of Finite Fourier Integration Transforms
for Structural Mechanics.; Proc. of the 20th Jap. Nat. Cong. for Appl. Mech. (1970)
- 6). Donald L. Dean and Hota V.S. Ganga Rao: Proc. of A.S.C.E. EM4 (1970)
Macro Approach to Discrete Field Analysis
- 7). 能町, 土木学会論文集 第146号 (1967)

図-3. 板中央に集中荷重載荷の場合

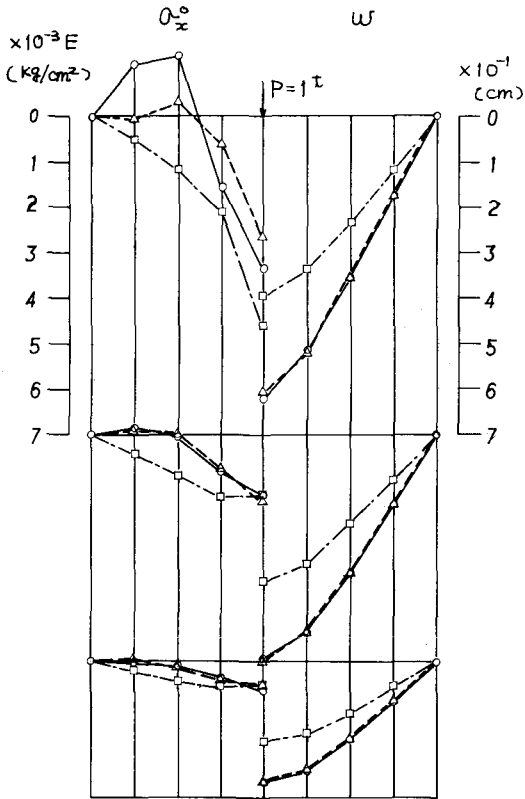
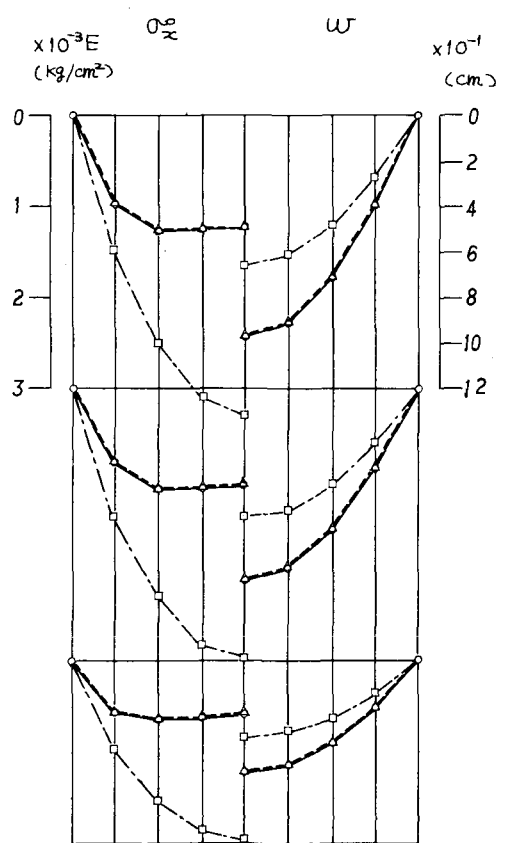


図-4. 等分布荷重 $q=1 \text{ kg/cm}^2$ 荷重の場合




 デッキプレート a 面外曲げ剛性を考慮しない場合

 " 考慮した場合 (Dean's 方法)

 Timoshenko の板理論