

軸方向にヒンジで結合された鋼管パイル基礎の 固有振動解析について

北海道大学 正員 能町 純雄
室蘭工業大学 正員 松岡 健一
苫小牧高専 〇正員 沢田 知之

1. まえがき

本論文は、鋼管を円形に配置した鋼管パイル構造を想定して、固有振動解析を行なったものである。鋼管は、隣同志、軸方向にヒンジ結合されており、質量は、深さ x の方向の線分布集中質量が相隣る鋼管の接合点に存在するものとして、力のつり合い方程式を作った。鋼管パイルは、基底で固定、地表で自由とし、土の K -値を考へて、振動方程式を求めた。各次振動について、2個の基本的固有値が表われる。

2. 理論式の誘導

図-1に示す一般図のうちの任意のパイル r 、 $r+1$ を取り上げて図-2に示す。これにより垂直方向、水平方向の曲げ、および振りに関する δ_r' 、 δ_r'' 、 P' を考へ、また P' で表わされる水平方向の変位 ε を考へることにより次の4式が導かれる。

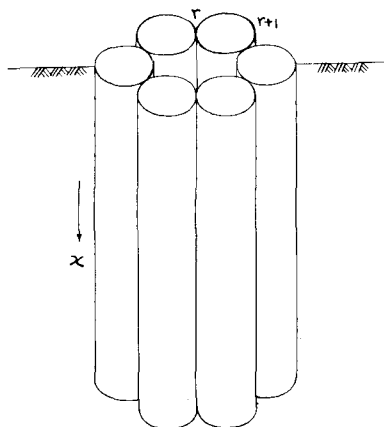


図-1

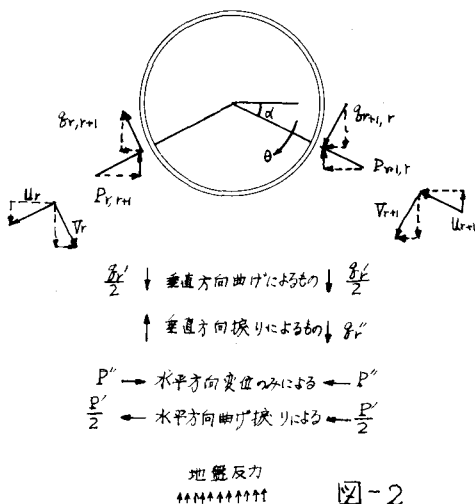


図-2

$$EI \cdot \left[\frac{\{ \frac{IV}{V_{r+1}}(x) + \frac{IV}{V_r}(x) \}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\{ \frac{IV}{U_{r+1}}(x) - \frac{IV}{U_r}(x) \}}{2} \cdot \sin \alpha \right] = \delta_r' + \left[\frac{\{ V_{r+1}(x) + V_r(x) \}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\{ U_{r+1}(x) - U_r(x) \}}{2} \cdot \sin \alpha \right] \times K \quad (1)$$

$$EI \cdot \left[\frac{\{ \frac{IV}{V_{r+1}}(x) - \frac{IV}{V_r}(x) \}}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{\{ \frac{IV}{U_{r+1}}(x) + \frac{IV}{U_r}(x) \}}{2} \cdot \cos \alpha \right] = P' - \left[\frac{\{ V_{r+1}(x) - V_r(x) \}}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{\{ U_{r+1}(x) + U_r(x) \}}{2} \cdot \cos \alpha \right] \times K \quad (2)$$

$$-GJ \left[\frac{\ddot{V}_{r+1}(x) - \ddot{V}_r(x)}{2a} \right] = g_r' \cdot 2a \cdot \cos \alpha + P' a \sin \alpha \quad \text{--- (3)}$$

$$\{ U_{r+1}(x) - U_r(x) \} \cdot \cos \alpha + \{ V_{r+1}(x) + V_r(x) \} \cdot \sin \alpha = \varepsilon \quad \text{--- (4)}$$

ここで、

$V_r(x)$: 半径方向の変位 $U_r(x)$: 接線方向の変位 a : 鋼管の半径
 EI : 鋼管の曲げ剛性 EI' : 鋼管の厚さ方向の曲げ剛性 k : 地盤反力係数
 GJ : 鋼管の捩り剛性 ε : 鋼管の水平方向変形量 $K = 2ak$

又(4)式の変形量 ε は、鋼管を図-3の如く円形アーチとして解いて求める。

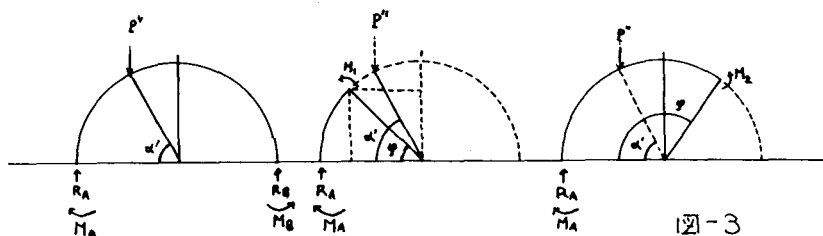


図-3

上図より

$\varepsilon = 2 \times \frac{dE}{dP'}$ で表わされる。 E はひずみエネルギーであり、 $E = \int_0^{\alpha'} \frac{1}{2EI} M_1^2 ds + \int_{\alpha'}^{\pi} \frac{1}{2EI} M_2^2 ds$ である。又、 $M_1 = M_A + R_A a (1 - \cos \varphi)$ 、 $M_2 = M_A + R_A a (1 - \cos \varphi) - P' a (\cos \alpha' - \cos \varphi)$
 M_A 、 R_A はパイルの荷重点における反力モーメント及び反力を表わす。 $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

また、次の如くの関係がある。

$$g_{r+1,r} \cos \alpha - P_{r+1,r} \sin \alpha = \frac{g_r'}{2} + g_r'' \quad \text{--- (5)} \quad g_{r+1,r} \sin \alpha + P_{r+1,r} \cos \alpha = P'' + \frac{P'}{2} \quad \text{--- (6)}$$

$$-g_{r,r+1} \cos \alpha - P_{r,r+1} \sin \alpha = \frac{g_r'}{2} - g_r'' \quad \text{--- (7)} \quad g_{r,r+1} \sin \alpha - P_{r,r+1} \cos \alpha = -P'' + \frac{P'}{2} \quad \text{--- (8)}$$

$$\text{節点条件として、} \quad g_{r,r+1} = g_{r+1,r} \quad \text{--- (9)} \quad P_{r,r+1} = P_{r+1,r} \quad \text{--- (10)}$$

故に、(5)~(8)より $P_{r+1,r}$ 、 $P_{r,r+1}$ および $g_{r+1,r}$ 、 $g_{r,r+1}$ をもとめ(1)~(4)からの g_r' 、 P' 、 g_r'' 、 P'' を代入することにより、(9)、(10)はすべて変位 U 、 V によって表わされる2本の式となる。
 ここで、 $U_r(x) = \sum U_i(x) \sin \frac{m\pi}{L} x$ 、 $\ddot{V}_{r+1}(x) = \sum \ddot{v}_i(x) \cos \frac{m\pi}{L} (r+1)$ 等と置き、加法定理にて整理し、軸方向にフーリエ変換を行なう。それら2本の式を U 、 V について、連立で解き、頂部でスパン方向に一方は自由端 ($x=0$ 端)、他方では固定 ($x=L$ 端) とし、 $\ddot{v}_i(0) = \ddot{u}_i(0) = 0$ 、 $v_i(L) = u_i(L) = 0$ を考慮して、整理すると、次の如く示される。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{V}_i(x) \\ \ddot{U}_i(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_i(0) \\ \ddot{V}_i(L) \\ U_i(0) \\ \ddot{U}_i(L) \end{vmatrix} \quad \text{--- (11)}$$

$$\text{ここで} \quad \ddot{V}_i(x) = \int_0^L V_i(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx$$

$$\ddot{U}_i(x) = \int_0^L U_i(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx$$

$$A = \frac{EI}{4} \xi_1 \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right) - \frac{GJ}{4a^2} \tan \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{K}{4} \xi_1 - \frac{EI}{AA'} \sin \alpha \cos \alpha \right) \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$B = -\frac{EI}{4} (D1_i - \sin \alpha D_i) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \left\{ \frac{EI}{AA'} \cos \alpha D_i - \frac{K}{4} (\sin \alpha D_i - D1_i) \right\}$$

$$C = -\frac{EI}{4} \cos \alpha D1_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{GJ}{4a^2} D_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - D1_i \left(\frac{K}{4} \cos \alpha + \frac{EI}{AA'} \sin \alpha \right)$$

$$D = \frac{EI}{4} \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - \left(\frac{K}{4} + \frac{EI}{AA'} \right) \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$Q1 = -\frac{EI}{4} \xi_1 \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 + \frac{GJ}{4a^2} \tan \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \quad Q2 = -\frac{EI}{4} \xi_1 \sin \frac{2\pi i}{n} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)$$

$$Q3 = \frac{EI}{4} (D1_i - \sin \alpha D_i) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \quad Q4 = \frac{EI}{4} (D1_i - \sin \alpha D_i) (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)$$

$$b1 = \frac{EI}{4} \cos \alpha D1_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 - \frac{GJ}{4a^2} D_i \left(\frac{m\pi}{l} \right) \quad b2 = \frac{EI}{4} \cos \alpha D1_i (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)$$

$$b3 = -\frac{EI}{4} \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \quad b4 = -\frac{EI}{4} \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)$$

$$\xi_1 = \tan \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad D1_i = \cos \frac{2\pi i}{n} + 1 \quad D_i = \cos \frac{2\pi i}{n} - 1$$

次に, $\alpha = 0$ における剪断力のつり合い式に慣性抵抗を導入すると

$$\frac{GJ}{4a^2} \cdot \dot{V}_i(0) \cdot (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) + \frac{EI}{4} \cos \alpha \left\{ \cos \alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) \ddot{V}_i(0) - \sin \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \ddot{U}_i(0) \right\} = \frac{\gamma A}{g} \cdot \ddot{V}_{rt}(0) \quad (12)$$

$$\frac{GJ}{4a^2} \tan \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \dot{V}_i(0) - \frac{EI}{4} \left\{ (\tan \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \ddot{V}_i(0) - \left\{ \cos \frac{2\pi i}{n} (1 + \sin \alpha) + 1 - \sin \alpha \right\} \ddot{U}_i(0) \right\} = \frac{\gamma A}{g} \cdot \ddot{U}_{rt}(0) \quad (13)$$

γ : 鋼管の単位体積当り重量 A : 鋼管の断面積 g : 980 cm/sec^2

そこで正弦振動を仮定すると,

$$\ddot{V}_{rt}(0) = -P^2 V_r(0) \sin pt \quad (14) \quad \ddot{U}_{rt}(0) = -P^2 U_r(0) \sin pt \quad (15)$$

また, $\alpha = l$ においてたわみ角 $\theta = 0$ より,

$$\frac{1}{\text{Det}} \left\{ Q1 \cdot V_i(0) + Q2 \cdot V_i(l) + Q3 U_i(0) + Q4 \cdot U_i(l) \right\} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{\text{Det}} \left\{ b1 V_i(0) + b2 \cdot V_i(l) + b3 U_i(0) + b4 \cdot U_i(l) \right\} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Det} = A \cdot D - B \cdot C$$

よって (16) (17) 式より $\ddot{V}_i(l)$, $\ddot{U}_i(l)$ を $V_i(0)$, $U_i(0)$ で表わし, (14) (15) 式と共に (12) (13) 式に代入すると, 次に示す様に, $V_i(0)$, $U_i(0)$ のみで表わされる振動方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} C1+C2 \cdot E1+C3 \cdot D1 - \frac{\gamma A}{g} P^2 & C4+C5 \cdot E2+C5 \cdot D2 \\ C6+C7 \cdot E1+C8 \cdot D1 & C9+C10 \cdot E2+C11 \cdot D2 - \frac{\gamma A}{g} P^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V_i(0) \\ u_i(0) \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

$$E1 = a1 \cdot b1 - b4 \cdot a1, \quad E2 = a4 \cdot b2 - b4 \cdot a2$$

$$D1 = b3 \cdot a1 - a3 \cdot b1, \quad D2 = b3 \cdot a2 - a3 \cdot b2$$

$C1 \sim C11$: (11)式における $V_i(0), u_i(0)$ の係数

よって上式の determinant = 0 なる P が固有振動数を示す。又、その P に対するモードを知ることができる。

3. 数値計算例

今、 $N=6$, $l=100\text{ cm}$, $A=2\text{ cm}^2$
 $k=1.0\text{ kg/cm}^2$, $E=21 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$
 $G=8.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$, 管厚 $a1\text{ cm}$ のものについて、 $x=0$ 端で自由、 $x=l$ 端で固定のもの、固有値とモードを $I=1$ について図-4, 図-5に示す。

4. あとがき

以上、軸方向にヒンジ結合され円形に配置された鋼管基礎についての固有振動解析と解析例を述べたが、境界条件を変えたものや、実際例についての計算値も当日発表するつもりである。また実験解析も行な、て理論の検討をする予定である。

尚、数値計算には、北大大型計算機 FACOM-230-60 を用いた。

5. 参考文献

- ・能町・松岡・沢田：円形に配置された鋼管パイルの基礎の応力計算 (土木学会第26回年次学術講演集)
- ・能町・松岡・沢田：鋼管パイル基礎の応力解析について (土木学会北海道支部研究発表論文集第28号)
- ・能町・松岡・沢田：軸方向にヒンジ結合された鋼管群なる基礎の応力解析について (第11回日本道路会議一般論文集)

