

流域地形構造と統計則

北海道大学 工学部 正員 藤田睦博

1 はしがき

出水現象の解析にあたり流域地形の定量的把握は基本的重要事項の一つである。この種の研究は、計量地形学の分野におけるHorton, Strahlerらの河道位数の概念と統計的手法を基本としている。我国においても高棹らの流域地形と出水特性を定量的に評価しようとする研究^{1),2)}もある。

Hortonらによって次のような流域地形に関する経験則が得られている。

- (1) 河道数則 $N_u = R_b^{k-u}$
- (2) 河道長則 $\bar{L}_u = \bar{L}_1 R_L^{u-1}$
- (3) 集水面積則 $\bar{A}_u = \bar{A}_1 R_a^{u-1}$
- (4) 河道勾配則 $\bar{S}_u = \bar{S}_1 R_s^{1-u}$

ここに N_u は位数 u の河道数、 $\bar{L}_u$, $\bar{A}_u$, $\bar{S}_u$ はそれぞれ位数 u の河道の平均的長さ、集水面積、勾配を示す。又 R_b , R_L , R_a , R_s はそれぞれ分岐比、河道長比、集水面積比、河道勾配比と呼ばれ、一流域においてはほぼ一定値をとることが確められている。(1)の河道数則は、河道ネットワークのトポロジカルな構造について記述したもので、他の地形則は、流域の幾何的構造について記述したものである。これらの地形則は、流域の地形を巨視的に表現したものであるが、経験的に得られたものであるだけに普遍性をもつかどうか興味ある問題である。この点に関して高棹¹⁾は、河道発生過程のランダム性を考慮することによって河道数則を説明している。しかし河道長則、集水面積則のように物理量に関する地形則については、理論的説明が未だなされていない。

ここでは河道ネットワーク構造についてグラフ理論を適用して、トポロジカルにのみ異なる河道配列を単純化し、これによって得られた結果をもとに各地形則を説明しようとしたものである。

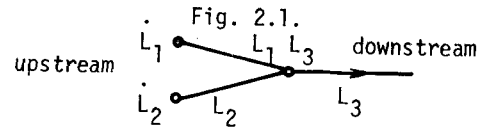
2 河道配列構造の統計則

2.1 河道配列パターン

河道配列のトポロジカルな構造を記述している河道数則は、河道のつながりとその構造だけをとりあ

げているもので、その意味においてグラフ理論の適用が便利である。

河道網空間は、向き Φ のついた枝（河道） K の集合と、その端点（合流点、河道の発生点）の集合 V のつくる有向グラフ $G(V, K, \Phi)$ とみなすことができる。ここでは2個の河道が合流して1個の河道を形成するものとし、分流はないものとする。河道網空間を形成する最小単位である2個の河道位数1位の河道を考え Fig. 2.1に示すように記号を付す。



すなわち点 L_1 から枝 L_1 が出るように番号をつける。又枝の番号と点の番号を区別するために点には・印をつける。Fig. 2.1において $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 3$ とすると出スター行列 $\bar{D}$, 入スター行列 $\bar{D}$, スター行列 D はそれぞれ

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$D = D - \bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

である。前述したように端点及び枝に番号をつけると $\bar{D}$ は単位行列となる。又 $L_1 < L_3$, $L_2 < L_3$ なる条件すなわち合流点において L_3 より若い番号の河道が結合すると D は、三角行列となる。

一般に位数1位の河道数を N とすると合流点の数は $(N-1)$ となり、河道網は端点数 $(2N-1)$, 枝の数は $(2N-1)$ のループを持たない有向グラフである。したがって $\bar{D}$ は $(2N-1) \times (2N-1)$ の単位行列、 D は $(2N-1) \times$

($2N-1$)の三角行列となる。又 $\bar{D}$ (又は D)と河道網は1対1に対応していることがわかる。

Fig. 2.2 に示す $N=3$ の場合、従来の識別法では2個のパターンが考えられたが、こゝでは同一の河道配列と考えることになる。 N の値が増加すると同じ河道配列であっても端点又は枝に付す番号の自由度が増し、 $\bar{D}$ 、又は D の要素が異なり、



Fig. 2.2

行列だけでは識別が困難となる。この場合最下流点と上流側にある端点間を枝の向に沿ってたどる定向点巡列を考える。例えば Fig 2.3 に示す $N=4$ の河道網について定向点巡列を示す行列 V は、次式で示される。(2.4)式の1行目の要素は、点1と点7を結ぶ径路内に枝が存在する時1、存在しない時0として作成したものである。

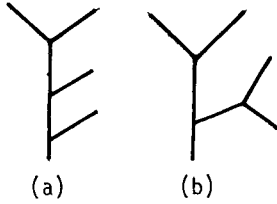


Fig. 2.3

$$V_a = \begin{array}{c|cccccc} \dot{1} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{2} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{3} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{4} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{5} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{6} & - & \dot{7} & & & & \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \quad (2.4)$$

$$V_b = \begin{array}{c|cccccc} \dot{1} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{2} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{3} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{4} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{5} & - & \dot{7} & & & & \\ \dot{6} & - & \dot{7} & & & & \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \quad (2.5)$$

I を単位行列とすると

$$A = V I \quad (2.6)$$

$$B = V^T I \quad (2.7)$$

は、それぞれその枝の最下流点からの距離及び重複度を表わし距離ベクトル、重複度ベクトルと呼ばれる。こゝでは

$$A_a = [3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1] \quad (2.8)$$

$$B_a = [1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 5 \ 1] \quad (2.9)$$

$$A_b = [2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1] \quad (2.10)$$

$$B_b = [1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3] \quad (2.11)$$

である。一般に位数1位の河道数を N とすると、枝又は点の数は($2N-1$)個であるから重複度ベクトルは奇数の要素からなり、そのうち N 個だけは1の値をとる。一方距離ベクトルについては、必ず2個の河道が合流点で1個の河道を形成するから、同じ値の要素が偶数個表われる。番号のつけ方をかえてもこれら両ベクトルは、その要素を互に並びかえたものにすぎない。したがってこの両ベクトルは、河道配列構造の特性を極めて簡単に記述している。(2.8)~(2.11)を更に簡単に表わすと

$$\begin{aligned} A_a &= [2 \ 2 \ 2] \\ B_a &= [1 \ 1] \\ A_b &= [2 \ 4 \ \cdot] \\ B_b &= [2 \ \cdot] \end{aligned} \quad (2.12)$$

こゝで距離ベクトルの i 番目の要素は、距離 i の枝の個数を示し、重複度ベクトルの i 番目の要素は重複度($2i+1$)の枝の個数を示す。又これら両ベクトルは、グラフ理論より

$$E = \bar{D}^T \quad (2.13)$$

E の i 個の積を E^i と表わすと、 V は

$$V = I + \sum_{j=1}^i E^j \quad (2.14)$$

で表わせる。

$N=4$ の時、河道配列網のパターン数は2個で重複度ベクトルで大きな重複度をもつ配列網が

ら番号をつけ、PT(4,1), PT(4,2)と表わす。Fig. 2.4にN=6までの各パターンと距離ベクトル、重複度ベクトルを示す。図では各パターン毎のベクトルを並べてi行目が、i番目のパターンに対応している。

1位の河道数がNの時のパターン数を S_N とすると、 S_N は Fig. 2.5 に示すように河道配列網をその最下流の合流点で切断して2個の集合を考え、各集合のパターン数をその組合せを考慮すると次式で表わせる。又従来の河道配列網のパターン数と比較すると Table 2.1 のようになる。

$$S_N = \sum_{i=1}^{[N/2]} S_i S_{N-i} \quad (N \neq 2m)$$

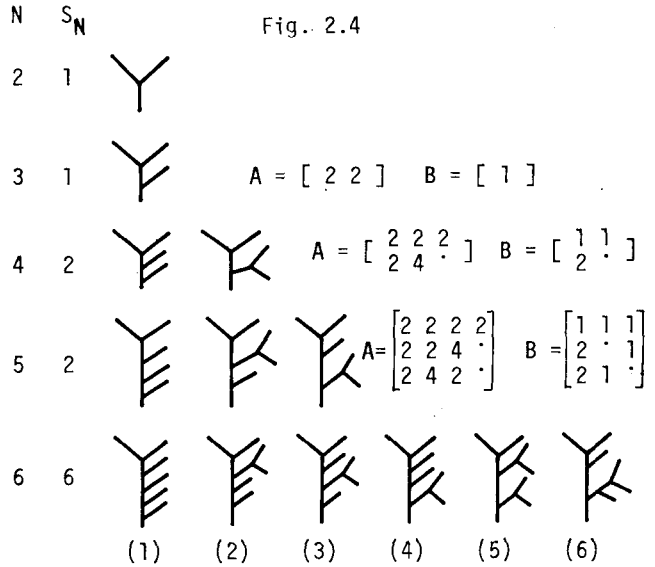
$$S_N = \sum_{i=1}^{[N/2]-1} S_i S_{N-i} + \frac{1}{2} S_{[N/2]} (1 + S_{[N/2]}) \quad (N = 2m)$$

(2.14)

2.2 河道網の形成過程と各パターンの 生起確率

河道網形成過程に初めて確率過程を導入した Shreve 以後、この概念に基づく幾多の研究がある。石原、高棹らは、河道が新しく発生する機会が全ての河道において等価として河道数則の成立¹⁾することを理論的に説明している。

こゝでは石原、高棹らの概念に基づいて、各パターンの生起確率を考えてみる。河道網を Fig. 2.5 に示されるように、最下流の合流点で分割して、一方に1位河道数 $Z=i$ ，他方に $Z=N-i$ となる組合せを $P_S(i, N-i)$ とし、この組合せの生起する確率を $P(i, N)$ とする。したがって次式が成立する。



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \cdot \\ 2 & 2 & 4 & 2 & \cdot \\ 2 & 4 & 2 & 2 & \cdot \\ 2 & 4 & 4 & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdot & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdot & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & 2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

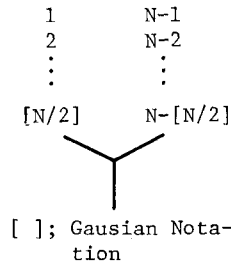


Fig. 2.5

Table 2.1

N	S_N	
	Conventional Method	Author's Method
6	42	6
16	9.695×10^6	1.0905×10^4
25	1.290×10^{12}	1.9680×10^7
27	1.837×10^{13}	1.0789×10^8
50	5.096×10^{26}	5.1501×10^{16}

$$\sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) = 1 \quad (2.15)$$

$Z = i$ の時 S_i 個の異なるパターンがあり、各々のパターンの生起確率を $P_1^i, P_2^i, P_3^i, \dots, P_{S_i}^i$ として

$$P_i = [P_1^i \ P_2^i \ \dots \ P_{S_i}^i] \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^{S_i} P_j^i = 1$$

とくと $Z = N$ の時の各パターンの生起確率は、

$$P_N = [P(i, N) P_{N-i}^T \cdot P_i] \quad (2.17)$$

$$i = 1, 2, \dots, [N/2]$$

ただし

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1$$

$P_S(i, N-i)$ は、 $P_S(i-1, N-i)$ 又は $P_S(i, N-i-1)$ に新しく河道が発生した時に生じる。 $Z = N-1$ の場合、河道の総数は $(2N-3)$ だから

$$P(i, N) = \frac{2i-3}{2N-3} P(i-1, N-1) + \frac{2(N-i)-3}{2N-3} P(i, N-1) \quad (2.18)$$

$$2 \leq i \leq [N/2]-1$$

$i = 1$ の時、 $P_S(1, N-1)$ は、 $P_S(1, N-2)$ に新しく河道が発生した場合か、 $P_S(2, N-3)$ 、 $P_S(3, N-4)$ 、 $\dots$ 、 $P_S([N/2], N-1-[N/2])$ の最下流の河道に新しく河道が発生した場合に生じる。したがって次式を誘導できる。

$$P(1, N) = \frac{N}{2N-3} \quad (2.19)$$

$$P([N/2], N) = \begin{cases} \frac{N-3}{2N-3} P(\frac{N}{2}-1, N-1) & (N = 2m) \\ \frac{N-4}{2N-3} P(\frac{N-3}{2}, N-1) + \frac{2N-4}{2N-3} P(\frac{N-1}{2}, N-1) & (N \neq 2m) \end{cases} \quad (2.20)$$

(2.18) ~ (2.20) 式より $P(i, N)$ の一般式は

$$P(1, N) = \frac{N}{2N-3}$$

$$P(i, N) = \frac{2(2i-3)! N! (N-2)! (2N-2i-2)!}{(i-2)! i! (N-i)! (2N-3)! (N-i-1)!} \quad (i = 2, 3, \dots, [N/2])$$

$$P(m, 2m) = \frac{8m}{(4m-2)!} \left\{ \frac{(2m-1)! (2m-3)!}{m(m-1)!} \right\}^2 \quad (N = 2m) \quad (2.21)$$

(2.17) 式と (2.21) 式を用いると、任意の N に対する各パターンの生起確率を計算できる。

$N = 7$ まで求めた結果を Table 2.2 に示す。

Table 2.2

N	Pattern	Occurrence Probability										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	P_4	4	1									$\times 1/5$
5	P_5	4	1	2								$\times 1/7$
6	P_6	8	2	4	4	1	2					$\times 1/21$
7	P_7	8	2	4	4	1	2	4	1	2	4	$\times 1/33$

$P_S(i, N-i) \quad i = 1, 2, \dots, [N/2]$ のそれぞれの最初に表われるパターンの確率を (2.17) , (2.21) 式より求めると

$$P(1, N) P_{11}^{1, N-1} = \frac{2^{N-3} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = P_1^N$$

$$P(i, N) P_{11}^{i, N-i} = \frac{2^{N-4} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{2} P_1^N \quad (i = 2, 3, \dots, [N/2]) \quad (2.22)$$

$$(N \neq 2m)$$

$$P'(m, 2m) P_{11}^{m, m} = \frac{2^{N-5} N! (N-2)!}{(2N-3)!} = \frac{1}{4} P_1^N \quad (N = 2m)$$

したがって $Z = N$ の時に生じる全てのパターンの生起確率は、 $P_1^N (1/2)^i \quad i = 0, 2, 3, \dots$ の形で表現できて、最も単純な形である $PT(N, 1)$ が最大の確率で生じることになる。

3 流域地形の幾何構造とその統計則

前章で述べたように河道網にグラフ理論を適用することによって得られた各パターンとパターン番号のつけ方及び河道発生過程のランダム性から得られたパターンの生起確率は、これから述べるように流域地形の幾何構造の考察を容易する。こゝでは特に河道長則、集水面積則について考察する。

今位数 u についての物理量（河道長又は集水面積）の期待値を $\bar{X}_u$ とする。Fig. 3. 1 に示すような河道網とその流域を考える。実線内の流域は、 $Z=17$ ，最大位数が 4 次である。

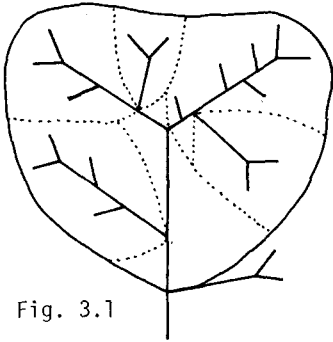


Fig. 3.1

破線は、位数毎に流域を分割したものである。この場合、 $Z=2$ からなる $u=2$ の部分流域 2 個、 $Z=3$ で $u=2$ の流域 1 個、 $Z=4, 5$ で $u=2$ の流域、 $Z=5$ で $u=3$ の流域、 $Z=8$ で $u=3$ の流域、 $Z=17$ で $u=4$ の流域からなっている。このように同じ位数 $u=2$ をとって $Z=2, 3, 5$ からなり、その個数も異なっている。こゝでは、位数毎に定まる物理量の期待値 $\bar{X}_u$ と同様に 1 位の河道数 Z に対応してある物理量の期待値 $\bar{Y}_Z$ が存在すると考える。Shreve³⁾ らは、米国において $\bar{Y}_5$ を 153 流域で求めた結果を発表している。後述するように筆者が北海道内の天塩川、十勝川流域で求めた結果でも Z 毎に整理した物理量は、対数正規分布をなしている。 $\bar{X}_u$ と $\bar{Y}_Z$ の関係について以下考察してみる。

$Z=N$ の時の $\bar{X}_u$ を、 $\bar{X}_{u,N}$ と表わすと $u=2$ の時

$$\bar{X}_{2,N} = \sum_{j=2}^N H_j \bar{Y}_j = \sum_{j=2}^N \left(\sum_{i=1}^{S_N} C_{2,j,i} P_i^N \right) \bar{Y}_j \quad (3.1)$$

こゝに $C_{2,j,i}^N$ は、 $Z=N$ で、 i 番目のパターンにおける $u=2$ の部分流域数である。 $C_{u,j,i}$ の値の一部を、Table 3. 1 に示す。

Table 3.1

N	Pattern No.	$C_{u,j,i}$ Value													
		Order-2						Order-3							
		2	3	4	5	6	7	4	5	6	7				
4	1	1													
	2	2						1							
5	1	1													
	2	2						1							
	3	1	1						1						
6	1	1													
	2	2						1							
	3	1	1						1						
	4	1	1								1				
	5	3						1							
	6	2							1						

表から容易にわかるように $C_{2,j,i}$ の値は、規則的で結局次のような漸化式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{X}_{2,N} = & P(1,N) \left\{ \bar{X}_{2,N-1} - \frac{2^{N-4} (N-1)! (N-3)!}{(2N-5)!} \bar{Y}_{N-1} \right\} \\ & + \frac{2^{N-3} N! (N-2)!}{(2N-3)!} \bar{Y}_N + \sum_{i=2}^{[N/2]} P(i,N) \{ \bar{X}_{2,N-i} \\ & + \bar{X}_{2,i} \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(\bar{X}_2^2 = \bar{Y}_2, \bar{X}_3^2 = \bar{Y}_3)$$

(3.2) 式の一般式は

$$\begin{aligned} \bar{X}_{2,N} = & B_N \sum_{i=1}^{N-1} C_i \bar{Y}_{N-i+1} \\ B_N = & \frac{2^{N-3} N! (N-2)!}{(2N-3)!} \\ C_i = & \frac{2^{3-i} (2i-5)!}{(i-1)! \{(i-3)!\}^2} \\ C_1 = & 1, \quad C_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

一方位数 3 についても (3.1) 式と同様

$$\bar{X}_{3,N} = \sum_{j=4}^N H_j \bar{Y}_j \quad (3.4)$$

位数3をなす最小のZは、 $Z=4$ なので(3.4)式においてはjの変域は $4 \leq j \leq N$ となる。Fig. 2. 5に示すように、 $P_S(i, N-i)$ 毎に $\bar{X}_{3,N}$ を求めてそれを $\bar{X}_{3,N}^i$ と置く

$$\bar{X}_{3,N} = \sum_{i=1}^{[N/2]} \bar{X}_{3,N}^i \quad (3.5)$$

$\bar{X}_{3,N}^i$ は

$$i = 1$$

$$\bar{X}_{3,N}^i = P(1, N) \{ \bar{X}_{3,N-1} - H_{N-1}^{N-1} \bar{Y}_{N-1} + H_{N-1}^{N-1} \bar{Y}_N \}$$

$$i = 2, 3$$

$$\bar{X}_{3,N}^i = P(i, N) \{ \bar{X}_{3,N-i} - H_{N-i}^{N-i} \bar{Y}_{N-i} + (H_{N-i}^{N-i} + P_1^{N-i}) \bar{Y}_N \}$$

$$i \geq 4 \quad N \neq 2m$$

$$\bar{X}_{3,N}^i = P(i, N) [\bar{X}_{3,N-i} + (1 - P_1^{N-i}) \bar{X}_{3,i} +$$

$$\bar{Y}_N \{ P_1^i + P_1^{N-i} (1 - P_1^i) \} - P_1^i \bar{Y}_{N-i}]$$

$$i = m, \quad N = 2m$$

$$\bar{X}_{3,N}^i = P(m, 2m) \{ 2(\bar{X}_{3,m} - P_1^m \bar{Y}_m) +$$

$$P_1^m (2H_m^m + P_1^m) \bar{Y}_{2m} \}$$

(3.6)

位数2, 3については、それぞれ $\bar{X}_u$ と $\bar{Y}_N$ の関係が既知となったので天塩川上流部及び十勝川上流部で5万分の1地形図より測定した結果について考察する。Fig. 3. 2に(2. 17)式より求まるパターンの生起確率と測定値の比較を示す。理論値の適合性が極めて良好なことがわかる。Fig. 3. 3にZ毎にまとめた流域面積と流路長の分布を示す。同一のZについては、両者ともほぼ同一の分散を示し、Zが増加するにつれて分散も増加する傾向がみられる。Fig. 3. 4にZ毎に求めた平均流路長($\bar{L}_N$)、平均集水面積($\bar{A}_N$)を他研究者の資料も含めて示す。 $\bar{L}_N$ 、 $\bar{A}_N$ ともNの α 乗に比例する傾向がある。ここでは、バラツキの少な

参考文献

- 1) 石原、高棹、瀬能；河道配列の統計則に関する基礎的研究、京大防災研年報、12号B、1969
- 2) 高棹、和田、椎葉；流域地形と出水特性の実証的研究、第28回土木学会年講、1973
- 3) W.C. Krumbein and L. Shreve, Some Statistical Properties of Dendritic Channel Networks, Department of Geological Sciences Northwestern University, April, 1970

い天塩川、十勝川の資料で求めた $\alpha=1.24$ を用いて $\bar{X}_{3,N}/\bar{X}_{2,N}$ を求め、Fig. 3. 5を得た。この図の縦軸は、 R_L, R_a に相等する。Nの増加と共に漸増する傾向がみられるが、 α の値は実験的に得たもので今後吟味したい。

