

流域平均降水量の算定について

北海道大学工学部

正員

星

清

1 はじめに 水文学においては、短期流出および長期流出をとわず、その系への入力としての流域平均降水量を高精度で推定する必要がある。その推定については、すでにいくつかの方法が提案されている。ティーセン法はその代表的なものの一つである。ティーセン法の長所は面積分割の一義性と計算の簡易性にある。しかしながら、ティーセン法の推定式はdeterministicであるため、その精度を評価することができない欠点がある。

本研究では、ティーセン法とは異なる統計的手法を用いて流域平均降水量を推定する。解析流域として石狩川上流部における9地点の雨量観測所を採用し、単位時間を一カ月として、流域平均月降水量を算定する。

2 流域平均降水量算定の問題点 流域平均降水量の算定の精度について、今だに多くの研究がなされている背景には、面積降水量の観測整備が現在行なわれていないことがあげられる。もし面積降水量が観測値として得られるならば、水文学においては、地点降水量が不必要となろう。しかしながら、現実には面積降水量は多くの場合観測されていないので、なんらかの方法によって地点降水量から流域平均降水量を推定する必要がある。流域平均降水量が地点降水量の荷重平均であると仮定されるならば、次式が成立する。

$$P = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (1)$$

ここで、 P : 流域平均降水量 α_i : 観測所の荷重係数 x_i : 地点降水量 n : 観測所数

α_i が荷重係数である以上、次の条件を満足しなければならない。

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (2)$$

$$\alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

すなわち、流域平均降水量を推定することは、(2)、(3)式を満足する重み係数を客観的に算定することに対応する。(1)式に示されるように従属変数なる流域平均降水量が観測され得ないことが、統計的にも、重み係数の算定を困難にしている。ティーセン法では重み係数は面積配分率に等しく、降水量の空間分布に

依存しないので、流域平均降水量の推定はdeterministicであり、その精度を評価することが不可能である。流域平均降水量が地点降水量の荷重平均であると仮定されるならば、その推定の精度は降水量の空間的、および地点変動に依存していると考えられるので、それらの変動を考慮するような統計的手法が要求される。また、ティーセン法の仮定に従っても、重み係数の算定には地点間の降水事象の高い相関性を最大限に活用できるモデル式を導入する必要がある。

3 基本式 一流域内の観測所を n 、月降水量の標本数を N とし、 x_{ij} を i 番目の観測所における j 番目の観測値とする。このとき、 N 個の観測値は n 次元空間の直交座標系内に分布していると考えられる。 j 番目の標本に着目すると、幾何学的にはFig. 1に示されるような系を考えることができる。 x_{ij} の点群を代表するような直線は次式で与えられる。

$$\frac{x_1 - b_1}{w_1} = \frac{x_2 - b_2}{w_2} = \dots = \frac{x_n - b_n}{w_n} \quad (4)$$

ここで、 b_i : 観測所 i における月降水量の平均値

w_i : 変量(観測所) x_i の方向余弦

次に、 C 点を通して(4)式に垂直な平面の方程式は

$$\sum_{i=1}^n w_i (x_i - x_{ij}) = 0 \quad (5)$$

よって、 CB の距離 D_j^2 は次式で与えられる。

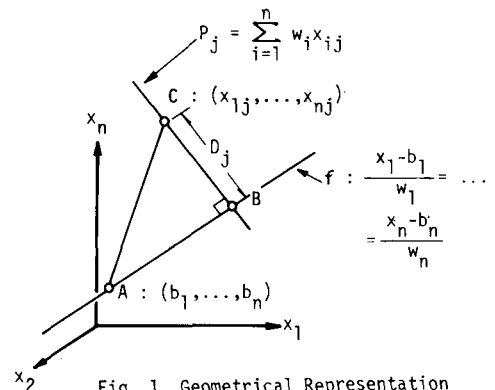


Fig. 1 Geometrical Representation of Model Equation

$$D_j^2 = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - b_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^n w_i (x_{ij} - b_i) \right]^2 \quad (6)$$

全標本 N について距離の平方和を求めると

$$D^2 = N \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n w_i (x_{ij} - b_i) \right]^2 \quad (7)$$

ここで、 σ_i^2 : 観測所 i における月降水量の分散

本報告での評価基準として、(7)の距離の平方和を最小にする方向余弦 w_i を算定する。そのためには、(7)式の右辺の第二項を最大にすればよい。面積降水量を地点降水量の荷重平均であると仮定すると、方向余弦と地点降水量は次式で関連づけられる。

$$P = W X \quad (8)$$

ここで、 P : $[1 \times N]$ の面積降水量 W : $[1 \times n]$ の方向余弦 X : $[n \times N]$ の地点間降水量

面積降水量の分散は次式で与えられる。

$$\sigma_P^2 = W Q W^T \quad (9)$$

$$Q = [X - B][X - B]^T / N \quad (10)$$

ここで、 σ_P^2 : 面積降水量の分散 Q : 降水量の分散・共分散行列 B : 各観測所の平均値を要素とする列ベクトル 1 : すべての要素が1からなる行ベクトル T : 行列の転置

(8)式の W は方向余弦であり、しかも荷重係数としての性質をもつから、次式が満足されなければならない。

$$W W^T = 1 \quad (11)$$

$$w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

(7)式の右辺の第二項は、(9)式の面積降水量の分散に等しいので、評価基準は(9)式を(11)の条件のもとで最大にすることになる。ラグランジュ法によって、結局次式が得られる。

$$(Q - \lambda I) W^T = 0 \quad (13)$$

ここで、 λ : ラグランジュ乗数 I : 単位行列 0 : 零ベクトル

(13)式の左から W を乗ずると次式が得られる。

$$\lambda = W Q W^T = \sigma_P^2 \quad (14)$$

(13)式から明らかに λ と W は分散・共分散行列の固有値と固有値ベクトルになる。しかも、(14)式に示されるように固有値は面積降水量の分散に等しいから

上述した評価基準に従うと、面積降水量を算定す

るために必要な固有値は、 n 個の固有値のうちの最大のものでなければならない。また、分散・共分散行列は正値定符号であるので、最大の固有値に対応する固有値ベクトルの要素はすべて正となり、(12)式の条件をみたとす。求められた方向余弦が正であれば、(2)式の条件をみたとす荷重係数は次式によって与えられる。

$$\alpha_i = w_i / \sum_{i=1}^n w_i \quad (15)$$

(15)式の荷重係数を地点降水量に乗じてその和を求めると流域平均降水量を算定することができる。

(13)式の固有値は n 個あり、最大の固有値が必要な解を与えるので、流域平均降水量の推定の精度は最大固有値の大きさに依存する。 n 個の固有値について次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (16)$$

すなわち、固有値の和は(14)式に示されるように、全分散に等しいから、最大固有値の全分散に対する比が推定の精度となり、最大固有値の全変動に対する割合が大きければ大きいほど、流域平均降水量を高精度で推定することができる。

4 適用例と考察 上で展開した理論

を月降水量に適用した例を示す。対象流域は石狩川上流部で、Fig. 2に示される9地点の観測所である。解析資料数は21年間(1951—1972)の同時記録である。水文年を11月から10月までとする。流域平均降水量の推定の精度は観測所数と標本数に依存していると考えられる。実際の水文解析にあたっては、長期間にわたる観測値を得ることができない場合が多いので、本報告では特に、標本数が異

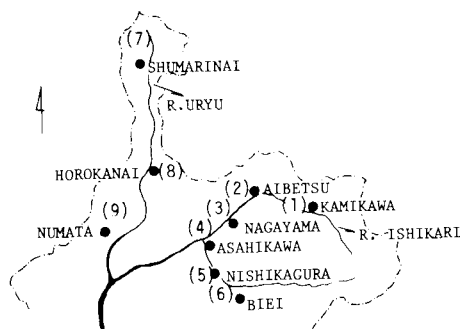


Fig. 2 Location Map of Selected Watershed and Raingages

なること
によって
、流域平
均降水量
を推定す
る際の荷
重係数と
精度がど
のように
変動する
かを考察
する。す
なわち、
全資料数
(21 年
間)、前

期資料 (10 年間)、後期資
料 (11 年間) の 3 例につい
ての解析結果を述べる。

地点降水量の変動を把える
ために旭川の月降水量の平均
値と標準偏差をそれぞれ、

Fig. 3 と Fig. 4 に示す。

夏期の降水を除けば、標本数
の差による顕著な変動の差は
みられず、時系列理論による
エルゴード性は満足されてい
ると考えられる。この事実は
月降水量の自己相関関数が一
年の卓越周期をもつことにも
対応する。

Table 1-A と 2-A は
(13) 式によって求めた方向
余弦 (w_2) を (15) 式によ
って荷重係数に補正した値で
あり、Table 1-B と 2-B
は流域平均降水量を算定し

たときの各地点降水量の寄与の度合を相関係数で示し
たものである。なお、これらの表中の観測所番号は
Fig. 2 の観測所番号に対応する。荷重係数は流域平
均降水量を推定するためには、標本数によらずに安定
していることが要求される。標本数の差による荷重係

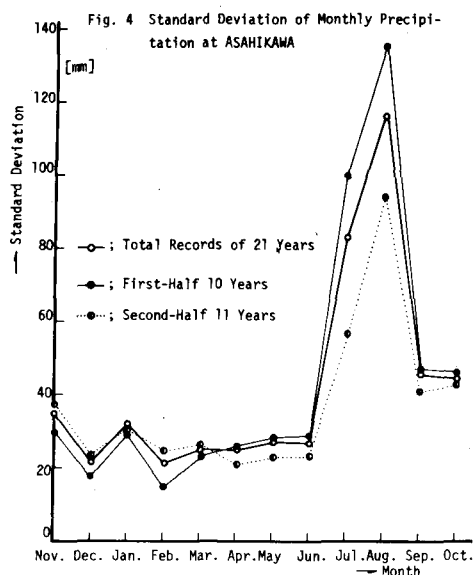
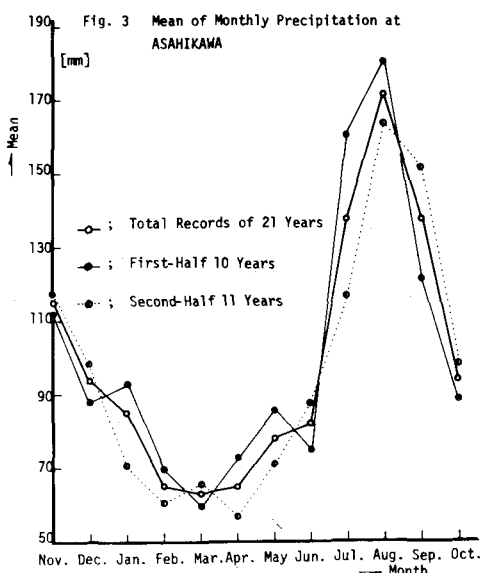


Table 1 - A Gage Weighting February

gage \ varying length	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total records	.063	.097	.077	.077	.082	.064	.251	.189	.100
first-half 10 yr	.073	.174	.059	.066	.080	.070	.264	.157	.059
second-half 11 yr	.062	.087	.081	.084	.082	.065	.244	.189	.106

Table 1 - B Correlation Coefficient February

gage \ varying length	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total records	.707	.753	.759	.845	.730	.678	.970	.856	.733
first-half 10 yr	.578	.869	.511	.705	.644	.478	.974	.795	.388
second-half 11 yr	.824	.915	.835	.946	.754	.884	.970	.866	.814

Table 2 - A Gage Weighting September

gage \ varying length	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total records	.082	.102	.106	.103	.109	.116	.144	.131	.107
first-half 10 yr	.089	.084	.095	.101	.107	.107	.158	.149	.110
second-half 11 yr	.069	.108	.113	.107	.116	.128	.147	.122	.090

Table 2 - B Correlation Coefficient September

gage \ varying length	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total records	.799	.886	.874	.931	.857	.918	.791	.903	.874
first-half 10 yr	.938	.911	.942	.921	.884	.928	.839	.956	.927
second-half 11 yr	.605	.856	.802	.922	.808	.899	.745	.826	.746

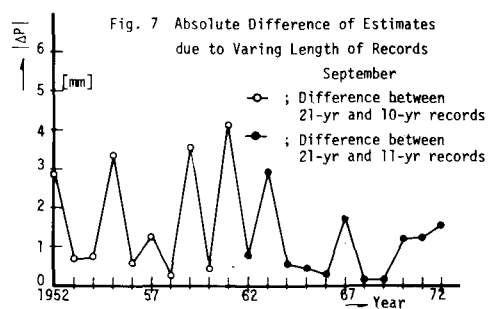
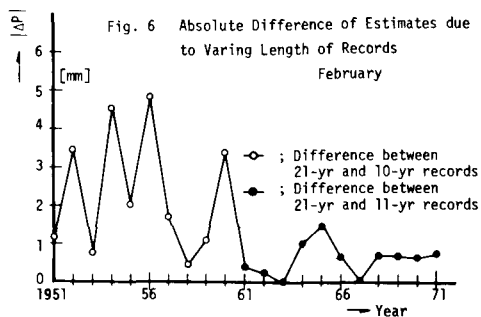
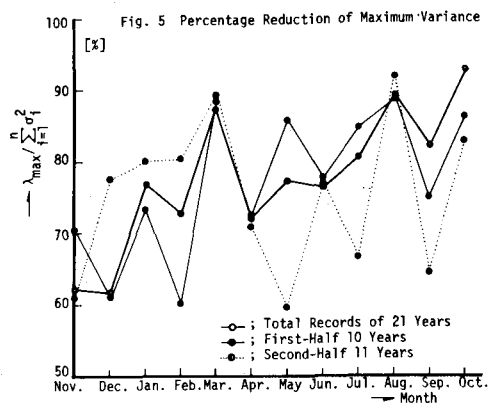
数も少数の例を除けば、有意な差がみられないので
、実際の水文解析では標本数がたとえ少なくても、
荷重係数を高精度で算定することが可能であると考
えられる。流域平均降水量と地点降水量の相関係数
が同程度であるということは、地点間の降水事象の

パターンが類似していることを示し、等降水線図が広域を包含していることを示している。

流域平均降水量の推定の精度は最大固有値の全分散に対する比で与えられるので、それを百分率で Fig. 5 に示す。全資料数 (21 年間) について、最大固有値の季節変動を調べてみると、冬期の降水量では、最大固有値は全分散の 70% 前後を説明している。一方、夏期の降水では、最大固有値は全分散の 80% 前後を説明している。すなわち、求められた最大固有値によって説明されない残りの分散は 20 ~ 30% であることを示している。標本数の差による最大固有値の季節変動は著しいと考えられる。全資料と 2 分された資料の最大固有値の差が最も大きいもので 15% 前後である。最大固有値にもっとも差があると考えられる 2 月と 9 月について、この差が流域平均降水量を算定したときどのくらい影響するかを考察する。標本数の差異による Table 1-A と Table 2-A の荷重係数を地点降水量に乗じて流域平均降水量を算定し、その差の絶対値を示したものが Fig. 6 と Fig. 7 である。流域平均降水量の推定値の差も最大で 5 mm 前後であり、標本数の差による流域平均降水量の推定値に有意な差はみられない。

本報告で採用した評価基準は (7) 式に示されるように距離の平方和である。(7) 式の右辺の第 1 項は地点降水量の変動を表わし、第 2 項は面積降水量の分散であるから、降水量の空間変動を表わす。すなわち、降水量の地点変動と空間変動の差が小さければ小さい程、距離の平方和は零に近づき、流域平均降水量を高精度で推定することができる。これを実際の降水事象から考えてみる。Fig. 3 と Fig. 4 に示されるように、降水量の地点変動は夏期の方が冬期より大きく、逆に降水量の空間変動は冬期の方が大きいので、距離の平方和を零に近づけることは困難な場合が多い。距離の平方和が零に近づくということは最大固有値が全分散に近づくことに対応する。

5 おわりに 流域平均降水量が地点降水量の荷重平均であると仮定して、stochastic な立場から荷重係数を算定する方法を述べた。実際の水文解析において、標本数が少ない場合でも本報告の手法は適用され得ることがわかった。計算も比較的容易で、降水量の分散・共分散行列の最大固有値とそれに対応する固有値ベクトルを求めさえすればよい。



流域平均降水量の推定の精度は降水量の地点変動と空間変動に依存しているので、推定の誤差を小さくできても、完全に除くことができない。精度は最大固有値の全分散に対する比で与えられる。流域平均降水量の推定の精度は観測所数にも依存する。その影響を調べるためには分散・共分散行列の任意の部分行列を抽出して、上述した手法を適用すればよい。

最後に御指導下さった山岡 勲教授に感謝いたします。なお、本報告の計算にあたっては、北海道大学計算センター内 FACOM 230-60 を利用した。