

非定常浸透流におけるデジタルモデルの試作

北海道開発局 土木試験所 正員 相田 俊 郎

まえがき

こう配のある不透水層上を運動し、かつ降雨のような縦流入のある非定常浸透流は、現在のところ、それぞれの現象に直接卓越して影響を与える項だけをとり上げて、限られた範囲での解析解や、数値解法などによって取扱はれているのが大部分である。最近研究的に、大型電子計算機の使用を前提として、有限要素法の手法が進展する過程にあるが、まだ容易に経済的に利用できるまでには到っていない。筆者は、地下水の自由水面が、緩かなこう配をもって、断面内の流速が一様で、ダルシー則が適用できるものに対して、中小型の電子計算機でも容易に安定な数値を与えるデジタルモデルを試作した。現在はX-Y-2次元モデルの骨子まで完了し、充分安定な数値が迅速に得られる段階に到っているが、精度については、検定に解析解を用いるために、X-1次元モデルについてしか確認していない。この結果によれば、若干の注意のもとに扱えば、実用可能であることを以下にのべる。ただし、この試作は、筆者が目下進めている「種々の流出解析法の関係について」シリーズ⁽²⁾において、地下水流出の検討を目的にしているため、扱う係数の性格など他分野固有の考察は論外にしている。

1. モデル骨子の組み立て

1-1. X-Y-2次元モデル

$$\left. \begin{aligned} \text{連続式 } \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h \cdot u_y)}{\partial y} &= P(t) \cdots (1) \\ \text{運動式 } u_x &= -K \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial x} \quad u_y = -K \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \cdots (2) \\ \text{但し } \tilde{H}_x &= Z_x - i_x x + h \quad \tilde{H}_y = Z_y - i_y y + h \cdots (3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\lambda; \text{空隙率, } h; \text{水深, } u; \text{流速, } P(t); \text{降雨,} \\ &K; \text{透水係数, } \tilde{H}; \text{水頭, } Z; \text{不透水層の落差,} \\ &i; \text{不透水層のこう配} \end{aligned}$$

いま(3)式を使って(2)式を変形し、(1)式に代入、整理すれば(4)式が得られる。

$$\lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = P(t) + K \cdot [h \cdot \{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \} + \{ (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2 \} - (i_x \frac{\partial h}{\partial x} + i_y \frac{\partial h}{\partial y})] \cdots (4)$$

数値計算にはCrank-NicolsonによるImplicit差分を使うことにし

$$\begin{aligned} h(x, y, t+1) &= B_i, \quad h(x+1, y, t+1) = C_{ix}, \quad h(x-1, y, t+1) = A_{ix}, \quad h(x, y+1, t+1) = C_{iy} \\ h(x, y-1, t+1) &= A_{iy}, \quad h(x, y, t) = B_m, \quad h(x+1, y, t) = C_{mx}, \quad h(x-1, y, t) = A_{mx} \\ h(x, y+1, t) &= C_{my}, \quad h(x, y-1, t) = A_{my} \quad \text{などとおきかえて、(4)式を差分化すると次式が得られる。} \end{aligned}$$

$$\lambda(B_i - B_m) \Delta t = P(t) + \frac{K}{2} \left\{ \begin{aligned} &B_m(C_{mx} - 2B_m + A_{mx})/\Delta x^2 + B_i(C_{ix} - 2B_i + A_{ix})/\Delta x^2 + B_m(C_{my} - 2B_m + A_{my})/\Delta y^2 + B_i(C_{iy} - 2B_i + A_{iy})/\Delta y^2 \\ &+ \{(C_{mx} - A_{mx})/(2\Delta x)\}^2 + \{(C_{ix} - A_{ix})/(2\Delta x)\}^2 + \{(C_{my} - A_{my})/(2\Delta y)\}^2 + \{(C_{iy} - A_{iy})/(2\Delta y)\}^2 \\ &- i_x(C_{mx} - A_{mx})/(2\Delta x) - i_x(C_{ix} - A_{ix})/(2\Delta x) - i_y(C_{my} - A_{my})/(2\Delta y) - i_y(C_{iy} - A_{iy})/(2\Delta y) \end{aligned} \right\}$$

実際の計算の進め方はGauss-Seidel反復法によることとして、上式の点線で囲まれた枠内をXY_{mi}とおき

B_iに関する2次式に整理すると

$$K \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) B_i^2 - \left[(A_{ix} + C_{ix})/\Delta x^2 + (A_{iy} + C_{iy})/\Delta y^2 \right] \frac{K}{2} B_i - \left\{ P(t) + B_m \lambda \Delta t + XY_{mi} \cdot \frac{K}{2} \right\} = 0$$

となるから、左辺第1項のB_iの係数をA、第2項のB_iの係数をB、第3項をCとおいてB_iを求めると

$$B_i = \left\{ B \pm \sqrt{B^2 + 4 \cdot A \cdot C} \right\} / (2 \cdot A) \cdots (5) \quad \text{となり、水位} B_i \text{に対しては一般に} B < \sqrt{\quad}$$

であるから「+」のみをとる。この計算は急速に収束し、安定な値を与えるが、精度の検定に適当な解析解がないので、 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ などを変えてみて判断する以外によい方法はないようである。筆者は試みに、 $\Delta x = \Delta y = 20\text{m}$ 、 $\lambda = 0.3$ 、 $i_x = i_y = 0.03$ 、 $K = 8.64\text{ m}^2/\text{day}$ 、断面数 $i_{mx} = i_{my} = 10$ 、初期水位 $h(x, y, 0) = 5.0\text{m}$ 、始端条件 $h(0, y, t) = h(2\Delta x, y, t) - 2\Delta x \cdot i_x$ 、 $h(x, 0, t) = h(x, 2\Delta y, t) - 2\Delta y \cdot i_y$ 、終端条件 $h(L_x, y, t) = h(x, L_y, t) = 2.5\text{m}$ 、 $P(t) = 0$ (但し $P(4) = 100\text{mm}$ 、 $P(5) = 50\text{mm}$ 、 $P(6) = 25\text{mm}$) などと正方対称条件で $t = 1 \sim 20\text{ day}$ (By Step 1 day) について計算をし

てみたところ、TOSBAC-3400 で $1/\theta$ 時間を入れて 1 分足らずであった。(末尾に結果の一部を記す)

1-2. X-1 次元モデル

連続式 $\partial h/\partial t + \partial(hu)/\partial x = P(t) \dots (6)$ 運動式 $u = -K \partial h/\partial x \dots (7)$ 但し $\ddot{H} = Z_0 - i_0 x + h \dots (8)$

を整理して $\partial h/\partial t = K \{ h^2 \partial^2 h/\partial x^2 + (\partial h/\partial x)^2 - i_0 \partial h/\partial x \} + P(t) \dots (9)$ を得る。計算は 1-1 と同様に

$h(x-1, t) = A$ 、 $h(x, t) = B$ 、 $h(x+1, t) = C$ 、 $h(x-1, t+1) = a$ 、 $h(x, t+1) = b$ 、 $h(x+1, t+1) = e$ などにおいて、 b に関する 2 次式 $(K/\Delta x^2)b^2 - \{ \frac{K}{2}(a+e)/\Delta x^2 - \lambda/\Delta t \}b - \{ P(t) + B\lambda/\Delta t + B_1 + \frac{K}{2}(C_1 - C_2) \} \dots (10)$ が得られる。上式では $B_1 = \frac{K}{2} \{ B(A-2B+C)/\Delta x^2 + C_{1m} - i_0(C-A)/(2\Delta x) \}$ 、 $C_{1m} = \{ (C-A)/(2\Delta x) \}^2$

$C_1 = \{ (e-a)/(2\Delta x) \}^2$ 、 $C_2 = i_0 \{ (e-a)/(2\Delta x) \}$ などとおいた。さらに (10) 式の第 2 項の係数を B_2 、第 3 項を C_3 とすれば $b = (B_2 \pm \sqrt{B_2^2 + 4C_3 K/\Delta x^2}) / (2K/\Delta x^2)$ となり、符号も $\pm$ だけをとって、水位について一意性をもたせる。このモデルの検定に用いる解析解は、最近次々と完成されつつあるが、(9) 式における $(\partial h/\partial x)^2$ を無視したものもあるので、このモデルのそのような解析解での検定は、このモデルでは $C_{1m} = C_1 = 0$ として、これを省略モデル(全項を入れたものを全項モデル)と呼んで対応することにする。

2. モデルの検定

検定にあたっては、各問題毎の特性には考慮を払わないで次のように一定のものとしておく。すなわち、 $K = 8.64 \text{ m}^2/\text{day}$ 、 $\lambda = 0.3$ 、 $\Delta x = 20 \text{ m}$ 、初期水深 5 m 、収束条件 $|B^{(n+1)} - B^{(n)}| < 0.001 \text{ m}$ 、反復回数 $n \leq 20$ 、(実際に n が 20 に及ぶものはなかった)、モデル計算は普通精度とする。などとした。

2-1. 高木条件による検定⁽³⁾

高木氏による解析解は、陰に初期水面形を放物線として、全区間長を L 、 $h(0, 0) = h_0$ 、 $h(L, 0) = h_c$ の条件のもとに、 $h(x, t) = \{ h_0 - (h_0 - h_c) \cdot x^2/L^2 \} (1 + B_T t)^{-1}$ 、ここに $B_T = 2K(h_0 - h_c)/(\lambda L^2)$ であるから、このモデル検定にあたっては、初期条件; $h(x, 0) = h_0 - (h_0 - h_c) \cdot x^2/L^2$ 、始端条件; $h(0, t) = h(2\Delta x, t)$ 、終端条件; $h(L, t) = h_c \{ 1 + (2K/\lambda) \cdot (h_0 - h_c) \cdot t/L^2 \}^{-1}$ として計算したものと解析解とを比較した。その結果を表-1 に掲げた。高木式は (9) 式において $P(t) = 0$ 、 $i_0 = 0$ 、さらに $(\partial h/\partial x)^2 = 0$ としているから、省略モデルに対応する。表には全項モデルの値も掲げたが、モデルの安定性をみるための参考としたにすぎない。

2-2. 尾島条件による検定⁽⁴⁾

尾島氏による解析解は、始端水位が時間的にステップ上昇 H_1 をするとき、すなわち

$h(0, t)_{t>0} = h(0, 0) + H_1$ の条件のもとで $DH(x, t) = H_1 \text{Exp}(-i_0 x/2) \sum_{n=0}^{\infty} [\text{Cerf}(\mu_1) - \text{Cerf}(\mu_2)]$

ここで、 DH : 初期水位からの増分

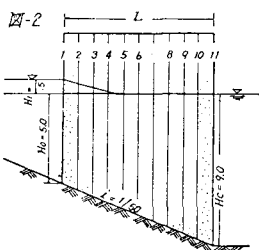
$$\mu_1; (2nL + x) / (2 \cdot \sqrt{h_c K \cdot t / \lambda})$$

$$\mu_2; \{ 2(n+1)L + x \} / (2 \cdot \sqrt{h_c K \cdot t / \lambda})$$

h_c : 下流端水深

表-1 高木式による検定

時刻 t (分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3.00	4.97	4.85	4.72	4.57	4.23	3.89	3.49	3.02	2.50
10	高木式	4.79	4.76	4.67	4.52	4.31	4.05	3.72	3.34	2.90
	省略モデル	4.80	4.78	4.67	4.52	4.32	4.05	3.72	3.34	2.90
	全項モデル	4.81	4.77	4.69	4.55	4.36	4.11	3.81	3.43	2.98
20	高木式	4.59	4.56	4.48	4.34	4.14	3.88	3.57	3.20	2.75
	省略モデル	4.61	4.57	4.49	4.34	4.14	3.89	3.57	3.21	2.78
	全項モデル	4.63	4.60	4.52	4.40	4.22	3.99	3.70	3.34	2.99
30	高木式	4.41	4.38	4.30	4.17	3.98	3.73	3.43	3.08	2.67
	省略モデル	4.43	4.40	4.31	4.17	3.98	3.74	3.44	3.08	2.67
	全項モデル	4.48	4.45	4.39	4.26	4.09	3.87	3.59	3.24	2.90
40	高木式	4.25	4.22	4.14	4.01	3.83	3.59	3.30	2.96	2.57
	省略モデル	4.26	4.23	4.15	4.02	3.83	3.60	3.31	2.97	2.57
	全項モデル	4.34	4.31	4.24	4.13	3.97	3.75	3.48	3.14	2.70
50	高木式	4.09	4.07	3.99	3.86	3.69	3.46	3.18	2.85	2.47
	省略モデル	4.11	4.08	4.00	3.87	3.70	3.47	3.19	2.86	2.48
	全項モデル	4.21	4.18	4.12	4.01	3.85	3.64	3.38	3.04	2.61



であるが、モデルと同じ表現にするために解析解を $h(x, t) = h(x, 0) + DH(x, t)$ として、モデルは、検定のために、初期条件; $h(x, 0) = h_c - i_0(L-x)$ 、始端条件; $h(0, t) = h(0, 0) + H_1$ 、終端条件; $h(L, t) = h_c$ として計算したものと、解析解とを比較した。その結果を表-2 に掲げた。なお、この解析解の計算において、 $\text{Cerf}(\mu)$ には Hastings の近似式を用い、Double-Precision を使って、収束条件には $|\sum_{n=0}^{n+1} [\text{Cerf}(\mu_1) - \text{Cerf}(\mu_2)] - \sum_{n=0}^n [\text{Cerf}(\mu_1) - \text{Cerf}(\mu_2)]| < 0.00001$ としたが、この式自体の近似度の検討はしていない。

2-3. 大橋条件による検定⁽⁵⁾

始端が周期的変動をする場合、重力による加速度項を省いた大橋氏の解析解は、 $\sigma = 2\pi/T_0$ (T_0 : 周期) とし、

$$h(0, t) = h_0 + H_1 \cos(\sigma t)$$

の条件のもとに

$$h(x, t) = h_0 + H_1 \exp(-m_A x) \cos(\sigma t - m_L x)$$

$$\text{ここで、} m_A = m_L = \sqrt{\rho_0 g / (2K + h_0)}$$

であるから、モデルの検定にあたっては

初期条件; $h(x, 0) = h_0$

始端条件; $h(0, t) = h_0 + H_1 \cos(\sigma t)$

終端条件; $h(L, t) = h_0$

などとして計算したものと解析解とを比較した。その結果を図-3に掲げた。なお、この初期条件は静止としたから、定常的波動状態のもとで解かれた解析解とは初期においては一致しないが、まもなく合致していく様子が見られる。

2-4. 内田条件による検定⁽⁶⁾

始端水位の時間的ステップ上昇 H_0 に対し、内田式は $h(x, t) = H_0 - H_0 \left\{ (x/H_0) / \sqrt{(8 \cdot K \cdot t) / (3 \cdot H_0 \cdot \lambda)} \right\}^{3/2}$ である

から、モデルの検定にあたっては、全項モデルを 初期条件; $h(x, 0)$

$= 0$ 、始端条件; $h(0, t) = H_0$ 、終端条件; $h(\infty, t) = 0$ とし計算

したものと、内田式とを比較した。その結果を図-4に掲げた。

内田式は、このモデルや尾島式とは誘導過程において異なった扱いをしているから、フロント位置以外ではあまりよい一致はみられないが、同式が、実験の裏付けをもっているという意味で比較してみた。

3. モデル取扱上の留意点

3-1. 流量計算とモデル修正について

断面位置 x における流量 Q_x を求める式に $Q_{x1} = -k \cdot h \cdot (\partial y / \partial x)_x$ 、 $Q_{x2} = -\lambda \int_0^x (\partial y / \partial t) dx$ の2方法がある⁽⁷⁾。このモデルは、ある区間だけの K の値を変えても安定であるから、実測水位に合わせるように、 K の値を場所的に変えて修正することができる。しかし、このような時は Q_{x1} の式は使えない。

3-2. 端末条件の“折返し”について

始端条件として 1-1 や 2-1 でとったような“折返し”の手法は、分水嶺のように対称地帯の条件に利用して便利であるが、このモデルが2次差分を使っているので、2次まで差分したものが許容範囲で連続しないと、ときとして安定しなくなるおそれがある。詳しいことはわからないが、精度とともにトライアルに Δx 、 Δt を決めることが希ましい。

3-3. 独立に与える端末条件について

このモデルは、2-3のような始端条件に加えて、終端にも波動条件を加え、さらにまた、底こう配を加えたりしても安定である。そして、振巾の程度にもよるが、距離的にはすぐ減衰するから、端末水位が不明な時に計算上設定する捨て区間を見積ることによって、端末水位の不明確さを計算区間の計算値に反映することもできる。

表-2 尾島条件による検定

断面	断面1	断面2	断面3	断面4	断面5	断面6
計算	解	解	解	解	解	解
0	5.00	5.40	5.40	5.80	5.80	6.20
1	5.50	5.56	5.54	5.83	5.81	6.20
2	5.62	5.61	5.61	5.87	5.85	6.22
3	5.65	5.65	5.66	5.90	5.89	6.24
4	5.67	5.67	5.69	5.93	5.91	6.25
5	5.69	5.69	5.70	5.94	5.93	6.27
10	5.72	5.73	5.76	5.99	5.99	6.31
20	5.75	5.75	5.80	6.03	6.02	6.35
30	5.76	5.78	5.81	6.05	6.03	6.37
40	5.76	5.78	5.82	6.06	6.03	6.38
50	5.77	5.78	5.83	6.06	6.04	6.39

図-3 大橋条件による検定

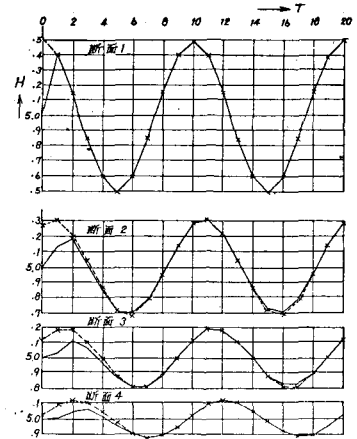
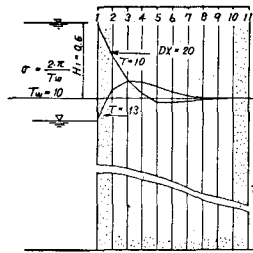
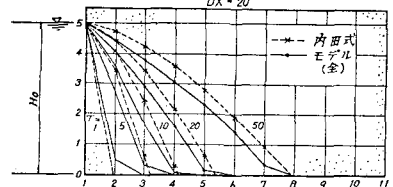


図-4 内田式による検定



4. 降雨のある条件を加えたモデル実験例

全項モデルで2. と同じ条件にし、さらに、 $i_0 = 3/100$ として、初期条件； $h(x, 0) = 5\text{m}$ 、終端条件； $h(104x, t) = 2.5\text{m}$ 、流入条件； $P(t) = 0$ (但し、 $P(4) = 100\text{mm/day}$ 、 $P(5) = 50\text{mm/day}$ 、 $P(6) = 25\text{mm/day}$ のある場合とない場合)、始端条件； $h(0, t) = h(24x, t) - 2i_0\Delta x$ として計算した結果を図-5に掲げた。流量は Q_{x1} によった。この計算は、FACOM-270-20 (cpu = 16kw) によった。計算時間は、 $t = 1 \sim 50$ で、コンパイル時間を入れて約10分であった。

あとがき

現段階では、Implicit 差分法の解の安定性は、あまりよく解っており、特に定数係数でないもののそれは、経験的、発見的に求めねばならないと言われているが⁽⁸⁾、これもそのようなものの一つかもしれない。まなびきにも述べたが、このモデルは地下永流出の検討を目的にしているが、拡散型の方程式を扱う他の分野にも役立つことであろうかと思って、敢えて試作段階のものながら紹介した。このモデルの発展として、端末条件を内部計算によって求めるものの開発、たとえば上に述べた折返し条件もその一つであるが、さらにたとえば、端末に水位流量関係を与えて、計算によって求まる流量から端末水位を自動的に求めて計算するようにするなどのことができれば、利用範囲も広がることと思われるが、これは将来に残されている。また、このモデルの収束状況については、発表の時に述べることにする。最後に、このモデルの試作にあたっては、北大の藤田睦博先生の御助言を頂いたことを記して末筆ながら謝意を表わす。

参考文献

- (1) 土木研究所報告 71年「非定常浸透流の有限要素法による解析」 飯田隆一ほか
- (2) 土木試験所月報 243号「種々の流出解析法の関係について」(芥二報)、同 176号「同題」(芥一報) 相田俊郎
- (3) 土木学会論文集 128号「低水流出の低減特性に関する研究」 高木不折
- (4) 第28回土木学会年次講演集 II-178「非定常浸透流に関する研究」 尾島 勝ほか
- (5) “ II-176「自由地下水の非定常性について」 大橋行三
- (6) 土木学会誌 37巻-2「自由境界を有する非定常浸透流について」 内田茂男
- (7) Proc. of ASCE HY6. Nov. '69「Theoretical Baseflow-Curves」 Krishan P. Singh
- (8) 土木学会誌 58巻-7「数値解法講座-18」 野木達夫

(1-1の計算例)

T= 13													
0.136E 01	6.209E 01	0.256E 01	0.285E 01	0.300E 01	0.301E 01	0.288E 01	0.258E 01	0.208E 01	0.130E 01				
0.209E 01	0.282E 01	0.329E 01	0.358E 01	0.372E 01	0.373E 01	0.361E 01	0.334E 01	0.291E 01	0.250E 01				
0.256E 01	0.329E 01	0.376E 01	0.405E 01	0.420E 01	0.421E 01	0.408E 01	0.378E 01	0.328E 01	0.250E 01				
0.285E 01	0.358E 01	0.402E 01	0.435E 01	0.449E 01	0.450E 01	0.436E 01	0.404E 01	0.348E 01	0.250E 01				
0.300E 01	0.372E 01	0.420E 01	0.449E 01	0.464E 01	0.465E 01	0.450E 01	0.417E 01	0.357E 01	0.250E 01				
0.301E 01	0.373E 01	0.421E 01	0.450E 01	0.465E 01	0.465E 01	0.451E 01	0.419E 01	0.358E 01	0.250E 01				
0.288E 01	0.361E 01	0.408E 01	0.436E 01	0.450E 01	0.451E 01	0.437E 01	0.407E 01	0.350E 01	0.250E 01				
0.258E 01	0.334E 01	0.378E 01	0.404E 01	0.417E 01	0.418E 01	0.407E 01	0.381E 01	0.335E 01	0.250E 01				
0.208E 01	0.291E 01	0.328E 01	0.348E 01	0.357E 01	0.358E 01	0.350E 01	0.333E 01	0.302E 01	0.250E 01				
0.130E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01	0.250E 01				