

波の変形 (I)

— Set-down and Set-up —

北海道大学院 学生会員 佐々木 幹夫
 北海道大学 工学部 正会員 佐伯 浩
 北海道大学 工学部 学生会員 中山 博好
 銭 高組 正会員 大久保 常雄

要旨

Phillips (1966), C. C. Mei (1972) によって発展せられた水深にわたって平均化した流体素子の運動量保存法則及び質量保存法則と Bowen 等 (1967), 日野等 (1972) が海浜流を扱うのに用いた基礎方程式とを関連づけ、それがオ1次近似の波動理論を適用する限り、その適用範囲の海底勾配においては全く任意の海岸地形に適用できることを明らかにし、波動による平均流速が発生していない箇所に最も高い平均海面が生じているが、その帯域の状態について2次元水路を用いて実験的考察を加えた。

1. はじめに

大洋からの進行波は浅海域を通り、汀線へとその波動エネルギーを伝へるが、その一部は破壊、海底摩擦、乱れなどによって、一部はその波動によって生じた海浜流によってエネルギーを失い、エネルギー転化のひとつのパターンを示している。このエネルギー転化のパターンはオ2次の $order (ka)^2$ を越えない範囲において、Radiation Stress (Longuet-Higgins and Stewart 1960, 1961, 1962, 1964) の生成消滅によって説明がなされる。この波動の応力テンソル量は海底から水面まで積分し、波動を平均化したものから生じたもので、波動による過剰平均運動量流束を表わしている。

近年、この Radiation Stress の概念を用いた海浜流へのアプローチが成功的になされ (Bowen 等 1967, 1969a, 1969b, Longuet-Higgins 1970, 1971, 日野 1972, 1973)、沿岸問題における非線形現象の一部が明らかにされた。平均流速がオ2次の $order O(ka)^2$ 以上のときは無視されるが、実際の海岸においても流れのないところが存在し、そういうところは海岸線方向の断面をとってみた場合、平均海面が最も高く、この箇所の平均海面勾配は Radiation Stress の変化によって示されることが明らかにされている。

この報告において、一般に水理学で扱うような流体素子の運動量保存方程式及び質量保存方程式を海底から海面まで積分し平均化して得た Phillips の方程式から一般に用いられている海浜流の基礎方程式を導くことによって、その適合条件を明確にしている。平均流速がないところは最も高い平均海面を作っているが、そういう状態の箇所を2次元水路にシミュレーションし、実験結果理論式による Set-down 量が破壊点においても実験値とよく合う場合があり、又 Set-up 算定に必要な係数 K はもとより流れの影響を考慮する必要があることを示している。

2. 理論的考察

海岸線に直角方向に x_1 軸、海岸線に平行方向に x_2 軸、垂直方向に z 軸をとり、流速 $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$ のあるところを進行波が通過する場合を考えると、流速は波動流速 $\vec{u}$ が重なり、平均水面に変化が生じ、新たに生じた平均水面を中心に波による水面変動 η があらわれ、 $-\eta(x_1, x_2) \leq z \leq \eta(x_1, x_2, t)$ に對して次の式が成立する

$$\frac{D(\rho \vec{u})}{Dt} + \nabla \cdot \vec{P} - \vec{X} = \vec{F} \quad (2.1) \quad \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.2)$$

又: 物体力, $\vec{F}$: 摩擦力

境界条件 $z = \pm \infty$ にて $P = 0$

いま、水面変動は時間に関して 第1次の order $O(ka)$ とし、平均流速 $u_i (= \bar{u}_i + M_i/\rho(h+\bar{z}))$ は第2次の order $O(ka)^2$ を越えないものとする。(2, 1), (2, 2) 式を境界条件 (2, 3) 式を用いて $z = -h$ から $z = \bar{z}$ まで積分し、時間平均する。水平方向の成分のみを扱う。(2, 1) 式左辺第3項はコリオリの力であり小さいものとするが省略でき、右辺は流体素子の変形にともなう生ずる応力で Re 数が高い場合は無視できるが木底から細面まで平均化した流体素子を考えているので船底摩擦の影響が大きい。第2項似まで取り入れる以上無視できなくなる。さらに、この流体素子内においては乱れによるエネルギーの減衰が考えられるが、いまここではこの乱れによるエネルギー減衰を視角の減衰に含ませるものと考えればそれは Radiation Stress の変化で表わされることになる。よって次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} M_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 M_1 + S_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 M_1 + S_{12}) = -\rho g(h+\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} + \bar{R} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} + F_1 \quad (2, 4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 M_2 + S_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (u_2 M_2 + S_{22}) = -\rho g(h+\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} + \bar{R} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} + F_2 \quad (2, 5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_1} M_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} M_2 = 0 \quad (2, 6)$$

$$\equiv \bar{z} \quad M_i = \int_{-h}^{\bar{z}} \rho(\bar{u}_i + u_i') dz = \rho u_i(h+\bar{z}) \quad (2, 7)$$

$$S_{ij} = \int_{-h}^{\bar{z}} \rho u_i' u_j' dz - \frac{M_i' M_j'}{\rho(h+\bar{z})} + S_{ij} \left[\int_{-h}^{\bar{z}} \rho dz - \frac{1}{2} \rho g(h+\bar{z})^2 \right] \quad (2, 8)$$

$$\text{ただし} \quad M_i' = \int_{-h}^{\bar{z}} \rho u_i' dz \quad i, j = 1, 2$$

上式の $\bar{R}$ は C, C, Mei によっておいたそれなりの船底に作用する平均静水圧で、一般には船の order と比較し無視できない項であり、(2, 1) 式の垂直方向の成分を積分し、時間平均をとり、 $z = -h$ とおけば次のように与えられる

$$\bar{R} = \bar{P}_h - \rho g(h+\bar{z}) = \rho \int_{-h}^0 \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_i} dz - \rho (u_3 h)^2 + O(ka)^3 \quad (2, 9)$$

しかし、水面変動が時間一周期的であり、 $O(ka)$ の order としているから、つまり、第1次近似の波動理論を適用するかわりに (2, 7) 式第2項は0となり、第2項も $\bar{z} \ll h$ の場合次のようになる。

$$(u_3 h)^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{\sinh k \bar{z}}{\sinh k(h+\bar{z})} \right)^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2} \left(\frac{\sinh k \bar{z}}{\sinh k h} \right)^2 = \frac{a^2 \omega^2 e^{k(h+\bar{z})} - e^{k(h-\bar{z})}}{2 e^{2kh} - 1} = 0 \quad (2, 10)$$

しかし、船底に作用する全平均水圧 $\bar{R}$ は第2次近似 $O(ka)^2$ の order まで取扱う以上、静水圧で示されることになり、全平均水圧 $\bar{R} = \rho g(h+\bar{z})$ とする。この平均静水圧 $\bar{R}$ を考えることにより、境界線を船岸線に平行 ($\partial h(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0$) で、をわけて線対称な領域 ($\partial h(x_1, x_2)/\partial x_1, \partial h(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0$) と仮定したりすることなしに計算を続けることができる。

(2, 4) 式の Radiation Stress を右辺に代入し、(2, 7) 式を用いると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i \rho(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^2 \rho(h+\bar{z})) + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j \rho(h+\bar{z}) = -\rho g(h+\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} - \left\langle \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} \right\rangle + F_i \quad (2, 11)$$

上式の左辺は次のようになる。

$$(\text{左辺}) = \rho(h+\bar{z}) \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho(h+\bar{z}) u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho(h+\bar{z}) u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_i \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \rho(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 \rho(h+\bar{z}) \right] \quad (2, 12)$$

右辺第4項は (2, 6) より0となり、同様のことから (2, 5) 式についてもいえるから結局次式を得る。

$$\rho(h+\bar{z}) \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho(h+\bar{z}) u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho(h+\bar{z}) u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho g(h+\bar{z}) - \left\langle \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} \right\rangle + F_i \quad (2, 13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_1} \rho u_1(h+\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \rho u_2(h+\bar{z}) = 0 \quad (2, 14) \quad i, j = 1, 2$$

これは (i) コリオリの力が無視でき、(ii) 乱れによるエネルギー減衰は波高減衰によって表わせる場合の沿岸流を予える際の基礎方程式で、海峡地形は任意の形ととり得る。

図-1 は 1950 年に Shepard and Inman によって報告されたカリフォルニア海岸に発生した典型的な海峡流系における砕波波高の分布を示す。図にプロットされている砕波波高を生じた位置は汀線からの距離が全部等しいというわけではないが、汀線にほぼ平

行な砕波帯における砕波波高を代表しているものと考えれば、砕波波高と平均水深との比は一定で、同じく $\frac{1}{2}$ の order になっているから、砕波点付近における平均水面は図の実線と同じような分布になっている H_b と考えてよい。

図の一番高いところが流速のないうちで、両側の低い砕波波高(平均海面)を示している箇所が沖向きに流れが生じているところである。

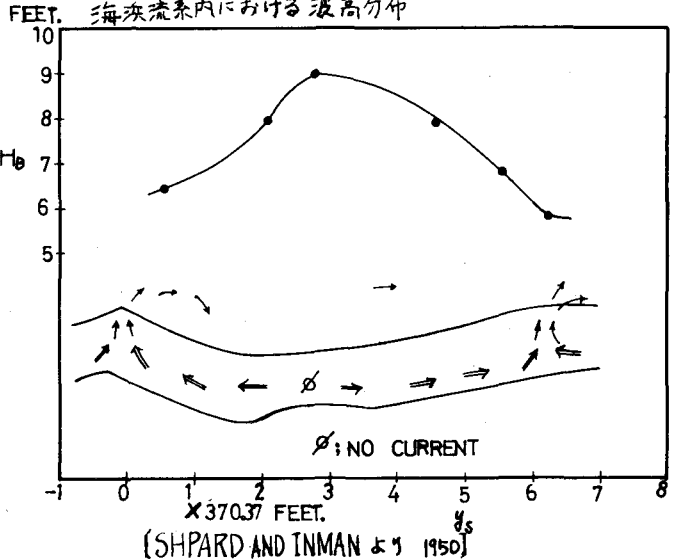
(2, 14) 式において、 $u_1 = u_2 = 0$ とおくと

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = -\rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2}$$

— (2, 15)

となり、海面勾配と Radiation Stress の逸散の平衡方程式である。

図-1 海峡流系内における波高分布



(SHEPARD AND INMAN より 1950)

3. Radiation Stress と平均海面勾配

Radiation Stress は進行波の速度ポテンシャルを与えれば (2, 8) 式より計算される。一般に Radiation Stress は (2, 8) 式で σ 項を無視した形で表わされているが、この (2, 8) 式で σ 項の order は次のように明らかにされている。簡単化のため、進行波の向きと x 軸の負の向きにとり、 $i, j = 1$ とすると、この σ 項は

$$\frac{M'_1 M'_1}{\rho g(h + \bar{\zeta})} = \frac{\left(\frac{E}{c}\right)^2}{\rho g(h + \bar{\zeta})} = E \frac{a^2 k}{2(h + \bar{\zeta}) \tanh k(h + \bar{\zeta})} = \begin{cases} \frac{E}{2} \frac{(ka)^2}{k(h + \bar{\zeta})} & k(h + \bar{\zeta}) \gg 1 \\ \frac{E}{2} \left(\frac{a}{h + \bar{\zeta}}\right)^2 & k(h + \bar{\zeta}) \ll 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

となり、この量を除いた Radiation Stress は

$$S''_{11} = \int_{-h}^{\zeta} (\rho u_1^2 + p) dz - \frac{\rho g}{2} (h + \bar{\zeta})^2 = E \left(\frac{2Ga}{c} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.2)$$

となり、波高が平均水深と同じくらい order になると σ 項を考慮する必要があることになる。

(2, 10) 式では、 $i, j = 1$ のとき、 $S_{12} = 0$ となるから、(3, 3) 式のようになる。

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} = -\rho g(h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \quad (3.3)$$

Bouma et al は wave set-down について (2, 8) 式で σ 項を無視し、 $S''_{11} = S''_{11}$ として、砕波点付近の理論値と実験値の比較を行なって理論値が実験値よりも大きめの平均水面修正量を与えているが、砕波点付近においては (3, 1) 式で与えられる量だけ Radiation Stress は小さくなるからこの量を考慮することによ

って理論値と実験値の差を小さくすることができよう。

Radiation Stress は砕波点まで増加しつづけ、砕波後は減少をふづけ wave set-up に寄与する。砕波後の平均水位変動量の増加と Radiation Stress の減少は砕波後の液高変化 $H = \alpha(h + \bar{\zeta})$ との仮定のもとに、 $S_n = S_n''$ として議論が進められてきた。しかし、砕波後の液高と平均水深との比 α は、いままでの実験報告からすれば 0.3 ~ 0.6 の範囲であり、 $\alpha = 0.4$ とすれば、 S_n と S_n'' との差は (3, 1) 式より約 0.08E 以下で、 $S_n = S_n''$ と置いたときは、 $S_n'' = \frac{3}{2}E$ とすれば 5.6% 以下大きめになっていることになる。いま、 $S_n = \beta E$ 、 $E = \frac{1}{8}\rho g H^2$ とすれば (2, 15) 式より次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = -K \frac{dh}{dx} \quad K = \frac{1}{\frac{4\beta}{3} + 1} \quad (3, 4)$$

$\alpha = 0.4$ とすれば、 $\beta = 1.42$ 、 $K = 0.079$ 、となり $K = 0$ 、1 のまわりにあるという ($S = S_0 \sim S_1$) 我々の報告と異なることになるが、 α の値はいままでの多くの報告により 0.3 ~ 0.6 の範囲にあるから、 β の値に検討がつけ加えられる必要がある。実際、実験室で観察する Surf-zone 内の波動において、かなりのもどり流れが認められるから、Radiation Stress は Surf-zone 内においてもどり流れのためにその減少の割合をかなり認められることになる。したがって、もどり流れによる Radiation Stress の減少度の増加を任意の常数 γ を使って $\gamma S_n'' / \partial x_1$ と表わすことができるなら (3, 3) 式は次のように改められ

$$(\gamma + 1) \frac{\partial S_n''}{\partial x_1} = -\rho g (h + \bar{\zeta}) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} \quad (3, 5)$$

結局

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} = -K \frac{dh}{dx} \quad K = \frac{1}{\frac{3\beta}{4} + 1} \quad \beta' = \beta(1 + \gamma) \quad (3, 6)$$

のような関係を得、海底摩擦を無視すれば、 γ はもどり流れの強さを示すことになる。

4, 実験装置と実験方法

実験に用いた水路の長さは 24m、幅 0.8m、深さ 0.8m の鋼ガラス張り水槽で勾配部の木座は格子かくフレームに 5mm 厚のアクリル板を張り、フラッタータイプ造波機を用いた。平均水面の変化量はオシログラフペーパーに記録された波形を積分して求めた。

我々は液高、位相速度、平均水面の変化を同時に測定するために、平均水面の変化と捻ね線式波高計で任意の点の水面変動を測定して記録された液高を積分することによって平均水面の変化量を算定した。この点について検討してみる。いま海面の任意の点 A の平均圧力変動は (2, 9) 式によって明らかにしたように、 $\bar{\zeta} \ll h$ のとき、静水圧のみによって与えられるから、A 点の水面変動を $\zeta(t)$ とすると、平均圧力 $\bar{P}_A$ は

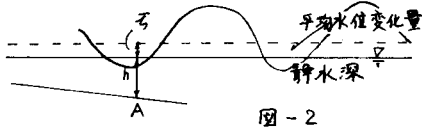


図-2

$$\bar{P}_A = \rho g h + \rho g \frac{1}{\pi T} \int_0^{\pi T} \zeta(x) dx$$

となり、平均水面の変化量は $\bar{\zeta} = \frac{1}{\pi T} \int_0^{\pi T} \zeta(x) dx$

となり、これは (図-3) のような、横に時間軸、縦に水位変動としてみた二次元場における曲線 ζ と 1 周期 T の n 倍周期の積分ととり、1 波長 $L (= T)$ の n 倍の nT 中で割ったものである。A 点の真上の水位変動は recorder の紙送り速度 C' とすれば、オシログラフペーパーに図-3 のように波形が記録されるから、B 線と基準とをれば (水面変動がないときの静水深線と B 線とを) 平均水面の変化量は記録された波形の波長と α とすれば次のようになる。

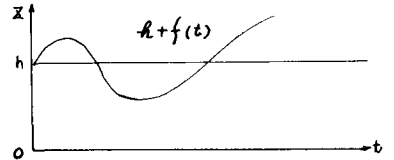


図-3

$$\bar{z}' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi a} f(x') dx'$$

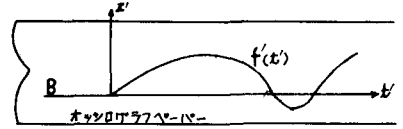


図-4

f は時間一周期的であるから $\int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\pi} f(\omega) d\omega = \pi S$ とすれば、水面変動は次のようになる。 $\bar{z} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \pi S = \frac{S}{\pi} = \frac{S}{2}$

実際の位相速度と伝送速度 C を等しくすることはほとんど不可能に近いから、いま $C = C' \times \epsilon$ で、波高が ϵ 倍されて記録されるなら、 $S' = \int_0^{\pi} f(x') dx'$ と定義すると、 S' は S を縦に ϵ 倍、横に $1/\epsilon$ 倍したもので $S' = S \times \epsilon \times 1/\epsilon$ となる。とすると $CT = L$, $C'T = a$ より $a = L/\epsilon$ の関係があるから

$$\bar{z}' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi a} f(x') dx' = \frac{1}{\pi a} \pi S' = \frac{S'}{a} = \frac{S}{\epsilon} \times \frac{1}{\epsilon} = \frac{S}{\epsilon^2} = \frac{S}{\epsilon} \times \frac{1}{\epsilon} = \frac{S}{\epsilon} \times \frac{1}{\epsilon} = \frac{S}{\epsilon^2}$$

よって、平均水面変動量は、波高が ϵ 倍されて写されるオッシュログラフペーパーの波形を ϵ 倍して積分したものを ϵ 倍で割ったものを $1/\epsilon$ 倍したもので与えられ、伝送速度 C' には全く関係なく算定されることとなる。また、問題は砕波後に含まれる気泡などの程度記録された波形に現われるが明確にはならないため、もし、記録される波形と A 点上の水面変動の波形に、気泡のため F くらいがあり、出てきた水位変動量 $\bar{z}$ は誤差を生ずることになる。

5. 実験結果と考察

図-5～8 は海底勾配 $S = 1/50$ の場合の Set-down と Set-up を示す。

図の実線は理論値を示す。Bowen et al. において $S = 1/2$ の場合、砕波点付近になると理論値が実験値よりも大きくなるという報告がなされているが、図-5 から図-7 までは砕波点まで実験値とよく合っており Bowen et al. の指摘したようにはなっていない。しかし、図-8 をみると沖側は理論値とよくあいつ、砕波点付近で理論値が実験値よりも大きくなっており、Bowen et al. の報告と一致している。図-5～7 までの砕波点での波高と平均水深の比は、0.64, 0.60, 1.0、図-8 においては、1.17 であり Bowen et al. の砕波時の波高・平均水深比は最低で 1.11 で、図-8 に近い。砕波型も Plunging 型砕波であることは共通している。したがって、(3, 1) 式より理論的には波高・平均水深比が 1 くらいになると $M^2/p(R+\bar{z})$ が無視できなくなるはずだが、実験値からは 1.11 あたりから $M^2/p(R+\bar{z})$ は無視できなくなるようである。換言するなら、Radiation Stress は波高・平均水深比の値が 1.11 より小さい波では過剰運動量流速から平均流速へのエネルギーの転化を無視できるが、1.11 より大きい

図.5

水路全体にわたる平均水面変化量

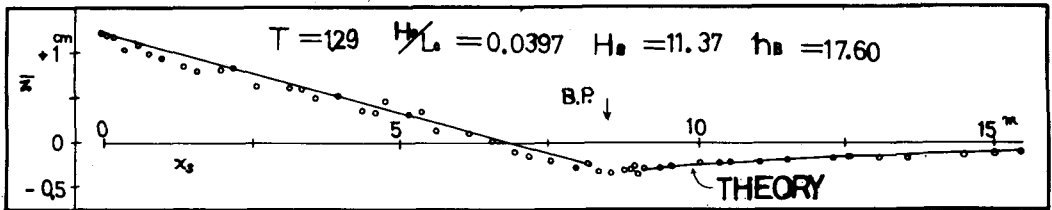


図.6

水路全体にわたる平均水面変化量

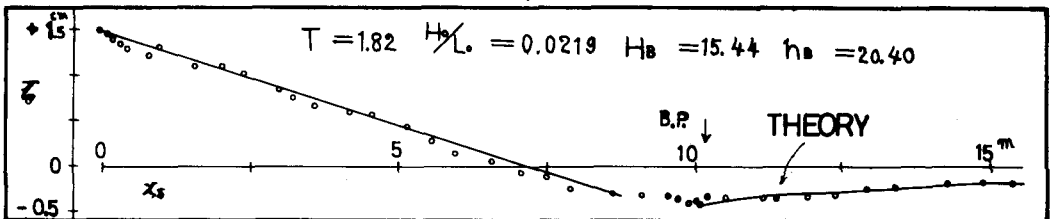
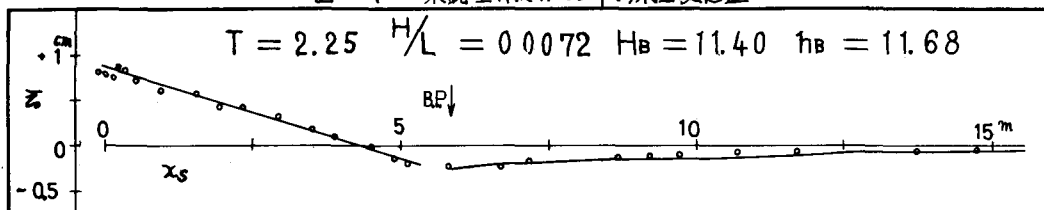
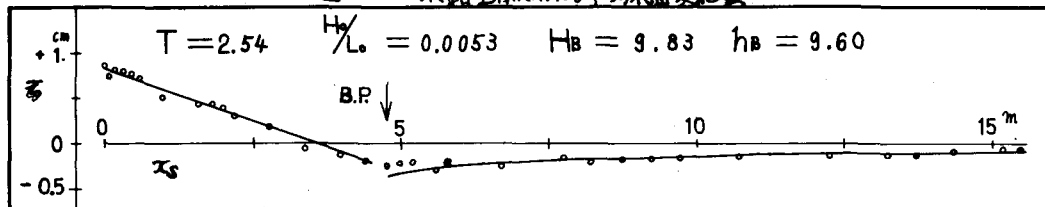


図 7 水路全体にわたる平均水面変化量



図・8 水路全体にわたる平均水面変化量



波ではそれを無視するわけにはいかないよ

うである。したがって、砕波点付近におい

ては *Spilling* 型砕波よりも *Plunging* 型

砕波の方が質量輸送が大きくなる。

図-9は砕波の波形勾配と η_B/H_B の関係

を示す。砕波点における *Set-down* は

砕波波高の0.2~0.5%の範囲にあり、お

おまかにみれば、砕波点付近において砕

波波高の3%の *Set-down* があらわれる

ことになる。又、可線における *Set-up* は

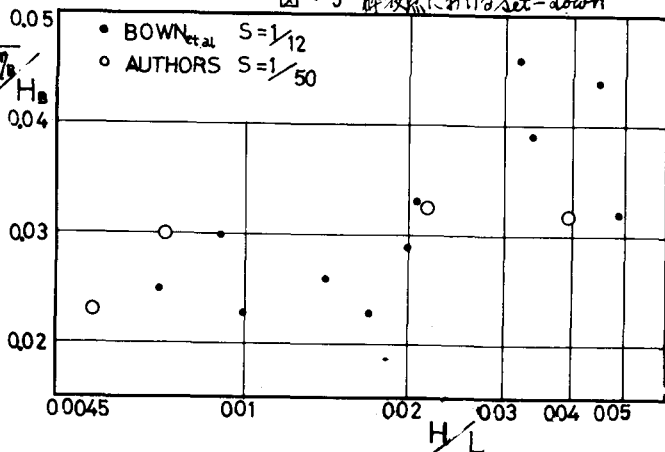
砕波波高の1割ほどであるから η_B と η_B

を結ぶ直線上に平均海面があることになり

、*Surf-zone* 内で一番高い平均海面の状

態を容易に推定できよう。

図・9 砕波点における *Set-down*



6. おまけ

1. 海流流を扱う場合 (2.13), (2.14) が基礎方程式とされているが、それは1次近似の波動理論を適用する限り、任意の海岸地形に適用できる。ただし、(i) 乱れによるエネルギー減衰は波高の減衰に含まれる。(ii) コリオリの力を無視する。(iii) 平均流速は $O(ka)^2$ を越えない *order* とする。

2. 波動により生じた海流流系内において流れのないところが存在し、それはその系において一番高い平均海面を作る。 η_B と η_B とを結ぶ直線上にその平均海面が位置する。

3. *Surf-zone* 内においてはもとより流れが *Radiation Stress* の遷移に影響を及ぼす。 k の値はこの影響を取り入れて考慮する必要がある。

終わりに、本報告をまとめるにあたって相談にご応じくださった本研究室の尾崎美敬様、ならびに、本実験装置の開発に協力して頂いた瀬井謙太郎氏に深甚の謝意を表します。

参考文献 Bown, A. J., et al. *J. geophys. Res.*, 73: 2569-2577. Longuet-Higgins, M. S., et al. *J. fluid Mech.*, 8: 565-583. *J. fluid Mech.*, 10: 529-545. 1961. *J. fluid Mech.*, 13: 481-504. 1962. *Deep-sea Res.*, 11: 529-562. Phillips, O. M. *Dynamics of the Upper Ocean* (1966) pp 261. C. C. Mei. *J. Marine Res.*, 31: No. 2: 97-104. 1972. Bown, A. J. *J. Geophys. Res.* Vol 74, No. 23: 5467-5480. 1969