最適除雪ルート探索法に関する基礎的考察

北大工学部　正○桝谷有三
〃　　〃　加来照俊

1. まえがき

前報[1]において著者等は、都市内街路が除雪によって各アークの走行所要時間が増加したとき除雪車がどの様なルートを走行すれば街路網全体の交通混雑　まひを最小にくいとめることができるかについて考察した。その際、除雪車の走行ルートは接続行列(Incidence Matrix)を用いて分岐限界法によって求めた。一方本研究は、除雪車の走行ルートを枝行列(Edge Matrix)から得られるアーク相互間の順序関係を示すアーク順序行列を用いて求めた。そうすると本問題は、オペレーションズ・リサーチの一分野であり、また土木工事の施工計画等においても種々論じられているスケジューリング問題[2),3)]に帰着できる。したがって、前報においてよりもさらに系統的に走行ルートを求めることができる。

2. アーク順序行列について[3) 4)]

いま、ある与えられた街路網をn個のノードとm個のアークをもつ有向グラフ(Digraph) Gとすると

$$G=(N, A) \quad \text{—(1)} \qquad N=\{n_i \mid i=1,2,\cdots,n\} \quad \text{—(2)} \qquad A=\{a_i \mid i=1,2,\cdots,m\} \quad \text{—(3)}$$

ここで、N, Aはノード、アークの集合

となる。さらに、問題を簡単にするためこの有向グラフGは各ノードの出次数(outdegree)と入次数(indegree)が等しいオイラー有向グラフ(以降グラフGという)とし、そのグラフを1台の除雪車ですべてのアークを除雪すると考える。そうすると、グラフGにはそれぞれのアークをただ1回ずつ含むオイラー線(Euler Line)が存在し、除雪車走行ルートの問題はある制約の下である目的関数を最大なり最小にするオイラー線を探索することになる。

次に、与えられたグラフGの枝行列$\mathbf{E}$について考える。この行列$\mathbf{E}$は、アークがノードによってつながれていると考えて(4)式で表わすことができる。さらに、スケジューリング問題において作業間の順序関係を示す先行

$$\mathbf{E}=\{e_{ij}\}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{—(4)}$$

ここで
$$e_{ij}=\begin{cases} 1\text{；アーク}i\text{がある ノード に入連結、アーク}j\text{が同じ ノード に出連結なるとき} \\ 0\text{；しからざるとき} \end{cases}$$

作業行列と同じ考えのもとにアーク相互間の順序関係を示すアーク順序行列を$\mathbf{P}$とすると(5)式で表わすことができる。

$$\mathbf{P}=\{p_{ij}\}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{—(5)}$$

ここで
$$p_{ij}=\begin{cases} 1\text{；除雪車がアーク}i\text{をアーク}j\text{に先行して除雪するとき} \\ 0\text{；そうでないとき} \end{cases}$$

この行列$\mathbf{P}$は、除雪車が最初に走行するアークに対応する列ベクトルの要素がすべて0になりそれ以外の列ベクトルにおいてはかならず1個の1を含んでいる。同様に、除雪車が最後に走行するアークに対応する行ベクトルの要素がすべて0になりそれ以外の行ベクトルにおいてはかならず1個の1を含んでいる。したがって、列ベクトルの要素がすべて0なるアークより順次要素が1なるアークをたどることによって一つの除雪車走行ルート(オイラー線)を求めることができる。以上2つの行列$\mathbf{E}$と$\mathbf{P}$との各要素の関係は(6)式で表わすことができる。

$$p_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{；}e_{ij}=0\text{のとき} \\ 1\text{または}0 & \text{；}e_{ij}=1\text{のとき} \end{cases} \quad \text{—(6)}$$

この式は、アークiとアークjがいずれのノードによっても連結されていないとき($e_{ij}=0$)、アークiからアークjへ走行不可能を意味し、一方$e_{ij}=1$のときはアークiからアークjへ走行可能を意味する。したがって、行列$\mathbf{P}$の要素の集合Pを(6)式により(7)式の様に分割でき、さらに、列ベクトル$\mathbf{P}_k$の要素の集合P_kも(8)式の様に分割でき

る．

$\overline{P}=\{P_{ij} \mid$ 行列$\mathbb{E}$において $e_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots m,\ j=1,2,\cdots m\}$, $\overline{\overline{P}}=\{P_{ij} \mid$ 行列$\mathbb{E}$において $e_{ij}=0,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots m\}$

$$P=\overline{P}\cup\overline{\overline{P}} \quad , \quad \overline{P}\cap\overline{\overline{P}}=\phi \qquad \text{—(7)}$$

$\overline{P_k}=\{P_{ik} \mid$ 行列$\mathbb{E}$において $e_{ik}=1,\ i=1,2,\cdots m\}$ $\qquad \overline{\overline{P}}_k=\{P_{ik} \mid$ 行列$\mathbb{E}$において $e_{ik}=0,\ i=1,2,\cdots,m\}$

$$P_k=\overline{P}_k\cup\overline{\overline{P}}_k \quad , \quad \overline{P}_k\cap\overline{\overline{P}}_k=\phi \quad (k=1,2,\cdots m) \text{—(8)}$$

$$P=\bigcup_{k=1}^{m}P_k \quad , \quad \overline{P}=\bigcup_{k=1}^{m}\overline{P}_k , \quad \overline{\overline{P}}=\bigcup_{k=1}^{m}\overline{\overline{P}}_k \quad \text{—(9)}$$

3. 除雪車走行ルート探索のモデル

1)目的関数（評価基準）について

2．でのべた様にグラフGにおける除雪車走行ルート（以降走行ルートという）（オイラー線）は数多く求めることができるので、走行ルートを探索するときには何らかの評価基準がなければならない．除雪問題においてもその考慮する問題に応じて種々考えられる[5)6)]．本研究においては、あるひと降りごとの除雪に対して除雪車をどの様に走行させるかを目的とするので、この様な問題に対しては(1)除雪車の除雪完了時間最小（除雪車の各ノードにおける全損失時間最小），(2)街路網における全車両の総遅れ最小 が考えられる．この2つの目的関数は除雪対象時間帯を考慮すると(1)は早朝・深夜などあまり交通需要がない時間帯に、また(2)はある程度交通需要がある時間帯に適用できよう．しかし、交通密度と除雪車の走行速度の関係[7)]をみると都市内街路の様に交通需要が多い日中において除雪車の走行速度は、大巾に減少するかあるいはまったく走行できない状態になる．それ故、その時間帯は除雪をまったく行なわないかあるいは交通規制・制御を施して除雪を行なうことを考えなければならない．本研究においては、交通規制・制御を加えた走行ルートについては考慮していない．また、ここで求める走行ルートはオイラー線であるので、目的関数(1)における各アークの除雪時間のトータルはいずれの走行ルートにおいても等しい．従って、目的関数(1)は各ノードにおける右・左折・迂回などによる損失時間のトータルを最小にする走行ルートを求めるかにもなる．そうすると、全損失時間T_R，総遅れT_Lはそれぞれ行列$\mathbb{P}$の関数として $T_R=T_R(\mathbb{P})$ —(10) ， $T_L=T_L(\mathbb{P})$ —(11) となる．

2)制約条件について

すべてのアークが順次除雪されていくとき、そのアークが除雪される最後のアークでないかぎり必ずつぎのアークへ除雪車は走行しなければならない．この条件を行列$\mathbb{P}$の要素P_{ij}を用いて表わすと(12),(13)式となる．

$$\sum_{P_{ij}\in\mathbb{P}_j} P_{ij} \leqq 1 \quad (j=1,2,\cdots,m) \text{ —(12)} \quad , \quad \sum_{P_{ij}\in\mathbb{P}_i} P_{ij} \leqq 1 \quad (i=1,2,\cdots,m) \text{ —(13)}$$

(12)式において不等号が成り立つのはアークiが最後に除雪される場合に限り、また、(13)式において不等号が成り立つのはアークjが最初に除雪される場合に限る．さらに、求められた走行ルートが実行可能であるためには、前述の様にすべてのアークが一つのサイクル（オイラー線）によって覆われていなければならない（この問題は、グラフ理論において被覆といわれ、一つのグラフのアークをそのおのおのがサイクルかパスであるような最小個数の互いに素な部分集合に分割すること）．いま、$L(\mathbb{P})=1$ によってグラフが一つのサイクル（オイラー線）で覆われていることを表わすと $L(\mathbb{P})=1$ —(14) が成立しなければならない．なお、求められた行列$\mathbb{P}$が(14)式を満足するかどうかの検定はこの行列$\mathbb{P}$の上で行なうことができる．

3)定式化

以上のべてきた様に、本研究における除雪車走行ルート探索問題はある与えられたn個のノードとm個のアークをもつ街路網を1台の除雪車で除雪するとき、除雪車の各ノードにおける全損失時間あるいは全車両の総遅れを最小にするアーク順序行列$\mathbb{P}$を求めることになる．したがって、この問題は1),2)の目的関数,制約条件を用いて次の様に定式化できる．

制約条件 ： $\sum_{P_{ij}\in\mathbb{P}_j} P_{ij} \leqq 1 \quad (j=1,2,\cdots m)$ —(12) $\qquad \sum_{P_{ij}\in\mathbb{P}_j} P_{ij} \leqq 1 \quad (i=1,2,\cdots m)$ —(13)

$L(\mathbb{P})=1$ —(14)

の下で目的関数 ; $T_R=T_R(\mathbf{P})$ — (10) あるいは $T_L=T_L(\mathbf{P})$ — (11)

を最小にするアーク順序行列$\mathbf{P}$を求める」

定式化から明らかな様にこの問題は、一種の組合せ的な最適問題となるので次節以降でのべるD.P.(Dynamic Programming)および分岐限界法(Branch and Bound Method)を用いた解法により考察した。

4. D.P.を用いた解法[8)]

いま、(5)式で定義された行列$\mathbf{P}$の列ベクトルを$\mathbf{P}_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$とおくと$\mathbf{P}_j$は(15)式で表わされ、(16)式となる。

$$\mathbf{P}_j=\begin{bmatrix}P_{1j}\\P_{2j}\\\vdots\\P_{mj}\end{bmatrix}\quad(j=1,2,\cdots m)\ —(15)\qquad \mathbf{P}_j=\mathbf{0}\ \text{または}\ \mathbf{e}_i\quad\left(\begin{matrix}i=1,2,\cdots m\\j=1,2,\cdots m\end{matrix}\right)\ —(16)$$

ここで、$\mathbf{0}$はm次元ゼロベクトルであり、$\mathbf{e}_i$は列ベクトルの要素$P_{ij}\ (\in \bar{P}_j)\ (j=1,2,\cdots,m)$のうち第i番目の要素のみが1で他がすべて0であるようなm次元単位ベクトルを表わす。

この定義された列ベクトル$\mathbf{P}_j$を用いて3.(3)でのべた定式化を行なうと制約条件(17),(18)の下で目的関数(19)式あるいは(20)式を最小にする問題に変換できる。したがって、問題は目的関数T_RあるいはT_Lを最小にする

$$\sum_{j=1}^{m}\mathbf{P}_j \leqq \mathbf{1}\ —(17)\qquad L(\mathbf{P})=L(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots\cdots,\mathbf{P}_m)=1\ —(18)$$

$$T_R=T_R(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots \mathbf{P}_m)\ —(19)\qquad T_L=T_L(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_m)\ —(20)$$

ここで $\mathbf{1}$; すべての要素が1であるm次元ベクトル

各段階(Stage)における政策(Policy)$\mathbf{P}_k$を決定することとなり、D.P.の多段階決定過程を導入することができる。すなわち、まずアーク数に等しい段階過程(この場合m段階)を設定し、各段階においてベクトル$\mathbf{P}_k$を一つずつ定めていく。そうすると、第k段階においては$(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k)$が定められている。このような段階過程を定めるとD.P.における最適性の原理により(19),(20)式の目的関数はそれぞれ(21)〜(23)式で表わされる。

$$T_{R0}(\phi)=0\ —(21)\qquad T_{L0}(\phi)=L_0\ —(22)$$

$$T_{Rk}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots \mathbf{P}_k)=\min_{\mathbf{P}_k}\left\{T_{Rk-1}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_{k-1})+\Delta T_{Rk}(\mathbf{P}_k)\right\}\ —(23)$$

$$T_{Lk}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots \mathbf{P}_k)=\min_{\mathbf{P}_k}\left\{T_{Lk-1}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots \mathbf{P}_{k-1})+\Delta T_{Lk}(\mathbf{P}_k)\right\}\ —(24)$$

ここで $L_0=\sum_{j=1}^{m}X_j\times(t_j-t'_j)$; 降雪後街路網全体がまったく除雪されていないときの遅れ

X_j ; アークjにおける交通量(台)　t_j ; アークjの除雪後(降雪前)の走行所要時間

t'_j ; 〃 の除雪前(降雪後)の 〃

また、(23),(24)式はそれぞれ第k段階までにおける除雪車の全損失時間、全車両の総遅れであり、ΔT_{Rk}, ΔT_{Lk}は第k段階において列ベクトル$\mathbf{P}_k$を定めることによって生じる損失時間、遅れの増分を表わしている。

さらに、各段階において列ベクトル$\mathbf{P}_k$を定める際(17),(18)式に相当する(25),(26)式の制約条件を満たしていなければならない。また、$\Delta T_{Rk}(\mathbf{P}_k)$, $\Delta T_{Lk}(\mathbf{P}_k)$はそれぞれ(27),(28)式で求められる。

$$\mathbf{0}\leqq \mathbf{P}_k\leqq \mathbf{1}-\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathbf{P}_\ell\ —(25)\quad,\ L(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k,\underbrace{\mathbf{0}\cdots\mathbf{0}}_{(m-k)\text{個}})=1\ —(26)$$

$$\Delta T_{Rk}(\mathbf{P}_k)=\begin{cases}l_{jk} & ;\ \mathbf{P}_k=\mathbf{e}_j\text{のとき}\\0 & ;\ \mathbf{P}_k=\mathbf{0}\text{のとき}\end{cases}\ —(27)\qquad,\ \Delta T_{Lk}(\mathbf{P}_k)=\sum_{j\in A_k}X_j\times(t'_j-t_j)\ —(28)$$

ここで l_{jk} ; 除雪車がアークjからアークkへ走行したとき通過するノードにおける損失時間

A_k ; 第k段階までに除雪されていないアークの集合

以上の手順をふまえて計算を順次行なっていくと第m段階においてそれぞれの目的関数を最小にするアーク順序行列$\mathbf{P}$を求めることができる。この様に、アークの除雪される順序をD.P.の段階分けに対応させることによって最適除雪車走行ルートを求めることができる。

5. 分岐限界法を用いた解法

いま、列ベクトル$\mathbf{P}_k$の属する集合をE_jとすると、E_jは(29)式で表わされるので、始点ノード0における解空間$X^{(0)}$はE_kの直積として(30)式となる。

$$E_k = \{ e_j \mid P_{jk} \in \overline{P}_k \} \cup \mathbf{0} \quad (k=1,2,\cdots,m) \quad \text{——(29)}$$

$$X^{(0)} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m = \{ (\mathbf{P}_1^{(0)} \cdots \mathbf{P}_k^{(0)} \cdots \mathbf{P}_m^{(0)}) \mid \mathbf{P}_k^{(0)} \in E_k \} \quad \text{—(30)}$$

本研究においては、街路網を1台の除雪車で走行させることについて考えているので、この始点ノード0より分岐(Branch)した第1段階におけるノードiの解空間を$X^{(i)}$($i \in N_0$)(・N_0；始点ノード0より分岐させることができるノードの集合)とすると(31)式となる．さらに、列ベクトル$\mathbf{P}_k^{(i)}$は(32)式で表わされる．

$$X^{(i)} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{m-1} = \{ (\mathbf{P}_1^{(i)} \mathbf{P}_2^{(i)} \cdots \mathbf{P}_m^{(i)}) \mid \mathbf{P}_t^{(i)} = \mathbf{0},\ \mathbf{P}_k^{(i)} \in E_k,\ k \neq t \} \quad \text{—(31)}$$

$$\mathbf{P}_k^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{0} & ;\ k=t \\ \mathbf{P}_k^{(0)} & ;\ k=1,2,\cdots,m,\ k \neq t \end{cases} \quad (i \in N_0) \quad \text{—(32)}$$

したがって，上式においてゼロベクトルを与えられた列ベクトルに対応するアークより除雪車が走行を始める．いま、ある段階のノードfにおいて一定ベクトルを与えるベクトル集合をR_fとおくと，始点ノード0においては$R_0 = \phi$，始点ノードより分岐したノードiにおいて$R_i = \{ \mathbf{P}_t^{(i)} = \mathbf{0} \}$となる．さらに，分岐を続行させると，一般に第$(k-1)$段階におけるノード$f$より分岐させた第$k$段階におけるノード$g$($g \in N_f$)の解空間は$E_m$の($m-k$)次直積空間として表わされ，また，$\mathbf{P}_k^{(f)}$と$\mathbf{P}_k^{(g)}$との間には(33)式の関係が成り立つ．

$$\mathbf{P}_k^{(g)} = \begin{cases} \alpha_t & ;\ \mathbf{P}_k^{(f)} \overline{\in} R_f,\ k=t \\ \mathbf{P}_k^{(f)} & ;\ \mathbf{P}_k^{(f)} \overline{\in} R_f,\ k \neq t \\ \alpha_k & ;\ \mathbf{P}_k^{(f)} \in R_f \end{cases} \quad \text{——(33)}$$

ここで、α_tおよびα_kはE_kに属する要素e_iの1つである

また、一定ベクトル$\mathbf{P}_t^{(g)}$($=\alpha_t$)を定める際には4．でのべたと同様(17)，(18)式に相当する(34)，(35)式を満たしていなければならない．

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{P}_t^{(g)} \leqq \mathbf{1} - \sum_{\mathbf{P}_k^{(f)} \in R_f} \mathbf{P}_k^{(f)} \quad \text{——(34)} \qquad L(\{ \mathbf{P}_k^{(f)} \mid \mathbf{P}_k^{(f)} \in R_f \},\ \mathbf{P}_t^{(g)},\ \underbrace{\mathbf{0} \cdots\cdots \mathbf{0}}_{(m-k)\text{個}}) = 1' \quad \text{—(35)}$$

次に，各ノードfにおける下界値(Lower Bound)(目的関数の値)は、一定ベクトルの集合R_fを用いるとそれぞれ(36)，(37)式より求めることができる．

$$LB_R^{(f)} = T_R(\{ \mathbf{P}_k^{(f)} \mid \mathbf{P}_k^{(f)} \in R_f \}) \quad \text{——(36)} \quad , \quad LB_L^{(f)} = T_L(\{ \mathbf{P}_k^{(f)} \mid \mathbf{P}_k^{(f)} \in R_f \}) \quad \text{——(37)}$$

このように計算を順次続行させると一般に第m段階のノードnにおいて解空間は空集合となりすべての列ベクトル$\mathbf{P}_k^{(n)}$が一定ベクトルになる集合R_nが得られて一つの除雪車走行ルートを示す順序行列$\mathbf{P}$が求められ，さらに、この第m段階の各ノードの下界値を求めてその最小の値をとるノードが最適除雪車走行ルートを与える．

6．あとがき

以上本研究において街路網をオイラー有向グラフにモデル化してそのグラフを1台の除雪車で除雪する簡単な問題についてD.P.および分岐限界法を用いてその解法を試みた．さらに，今後は本モデルを除雪車が2台以上の場合及び除雪対象街路網の選定についても研究を進めてゆく．また，本研究において考慮しなかった街路除雪と交通規制・制御の関係についても研究を進めてゆく．

7．参考文献

1) 除雪ルート探索に関する一考察 ；桝谷有三・加来照俊 土木学会道支部論文集第29号 1973

2) 施工計画における最適ネットワーク作成法に関する一考察；吉川和広・春名攻 土木学会論文報告集 第182号 1970

3) スケジューリング(I) ；山本正明 オペレーションズ・リサーチ Vol 17 No.5 p58〜p63 1970

4) グラフ理論の基礎 数学ライブラリー6 ；小野寺力男著 森北出版 1968

5) 道路除雪における目的関数の設定について；五十嵐日出夫・宮本義憲 第10回日本道路会議論文集 1973

6) 除雪路線網探索に関する一考察 ；桝谷有三・加来照俊 第10回日本道路会議論文集 1973

7) 道路除雪車の所要台数算出について ；山野耕二・他 第9回日本道路会議論文集 1971

8) ダイナミック・プログラミング入門 ；日科技連DP部会 日科技連 1964．